

АКАДЕМИЯ НАУК СССР
НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЦЕНТР

На правах рукописи

БИКТАШЕВ ВАДИМ НАДЫРОВИЧ

УДК 577.3
ЭВОЛЮЦИЯ ВИХРЕЙ В АКТИВНЫХ СРЕДАХ.

03.00.02 Биофизика

Диссертация
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научные руководители:
доктор физико-математических
наук, профессор

В.И.Кринский

доктор физико-математических
наук

Э.Э.Шноль

ПУШНИНО-1989

ОГЛАВЛЕНИЕ

<u>ВВЕДЕНИЕ</u>	4
<u>Глава 1. ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ</u>	9
1.1. Автоволны	9
1.2. Ревербераторы	14
1.3. Эволюция ревербераторов	16
1.4. Свитки	19
1.5. Эволюция свитков	21
<u>Глава 2. ЭВОЛЮЦИЯ МЕДЛЕННО МЕНЯЮЩИХСЯ АВТОВОЛН</u>	24
2.1. Общие положения	24
2.2. Уравнение эволюции для ММАВ: постановка задачи	25
2.3. Эвристический вывод уравнения ММАВ	27
2.4. Более строгий вывод уравнения ММАВ	33
2.5. Некоторые частные и предельные случаи	39
2.6. Примеры решений уравнения ММАВ	41
2.7. Диссипативные свойства одномерного уравнения ММАВ	48
2.8. Связь с методом Уизема	50
<u>Глава 3. ДРЕЙФ РЕВЕРБЕРАТОРА В РЕЗУЛЬТАТЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ С ГРАНИЦАМИ</u>	55
3.1. Предварительные замечания	55
3.2. Адиабатическое приближение	58
3.3. Внутренняя область	61
3.4. Внешняя область	66
3.5. Сшивка в промежуточной области. Уравнения движения ревербератора	69
3.6. Примеры	72
3.7. Обсуждение	76
<u>Глава 4. ТЕОРИЯ ЭВОЛЮЦИИ СВИТКОВ</u>	78
4.1. Эволюция скрученного свитка	78
4.2. Эволюция изогнутого свитка	83

4.3. О локальности эволюции свитков.....	92
<u>Глава 5. ЧИСЛЕННЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ ПО ЭВОЛЮЦИИ РЕВЕРБЕРАТОРОВ.....</u>	94
5.1. О постановке численных экспериментов.....	94
5.2. Эволюция ревербератора под действием локализованной стимуляции.....	95
5.3. Эволюция ревербератора под влиянием делокализованного воздействия.....	104
<u>Глава 6. ЧИСЛЕННЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ ПО ЭВОЛЮЦИИ СВИТКОВ.....</u>	117
6.1. О постановке численных экспериментов.....	117
6.2. Приповерхностная стимуляция.....	118
6.3. Локализованные воздействия на свиток.....	128
6.4. Автономная эволюция изогнутого свитка.....	133
<u>ВЫВОДЫ.....</u>	143
<u>ЛИТЕРАТУРА.....</u>	145
<u>БЛАГОДАРНОСТИ.....</u>	150

ВВЕДЕНИЕ.

Автоволны – форма самоорганизации в пространстве и времени, весьма распространенная в живой природе. Обычно автоволнами называют бегущие волны, которые имеют устойчивые ("самоподдерживающиеся") параметры – скорость, амплитуду, форму. С формальной точки зрения, автоколебания или стационарные диссипативные структуры (автоструктуры) могут рассматриваться как частные или предельные случаи автоволн: автоструктуры – для случая нулевой скорости, автоколебания для бесконечной.

Автоволновыми процессами являются: распространение первичного импульса, возбуждения в сердечной мышце, перистальтические волны в кишечнике, волны химической сигнализации в популяциях некоторых одноклеточных. Обнаружены автоволны в экспериментах на коре головного мозга и на сетчатке глаза. Известен ряд автоволновых систем искусственного происхождения – химические реакции (реакция Белоусова-Жаботинского), твердотельные системы и др.

Автоволнами иногда называют волны перепада, когда после прохождения волны среда переходит в существенно другое состояние, и повторное распространение такой волны через то же место уже невозможно. Такие волны могут наблюдаться в системах, которые не являются открытыми (волны фазовых переходов). Но наиболее сложное поведение наблюдается в открытых системах, когда состояние среды поддерживается за счет каких-то внешних источников энергии. Иногда это может быть лишь "условно внешний источник" – например, реакция Белоусова-Жаботинского и подобные ей в классическом варианте поддерживаются за счет запасов определенного вещества, которое расходуется медленно, и свойства среды практически

не меняются после прохождения по ней большого количества волн. Такие среды принято называть активными.

Источниками АВ в живых системах, как правило, являются автоколебательные элементы, часто называемые пейсмейкерами. Однако оказалось, что в некоторых условиях в неодномерной автоволновой среде могут существовать источники автоволн совсем иной природы – автоволновые вихри. Винер и Розенблют [1946], построив аксиматическую модель для распространения возбуждения в сердце, показали, что источником автоволн может быть автоволна, циркулирующая вокруг невозбудимого препятствия. Этот источник рассматривался в качестве механизма сердечных аритмий. Он может конкурировать с синусовым узлом, который в норме и является пейсмейкером, задающим ритм работы всего сердца. Позднее Балаховский [1965] обратил внимание, что наличие невозбудимого препятствия необязательно для поддержания циркуляции – нужны лишь подходящие начальные условия. Ревербераторы были экспериментально обнаружены в реакции Белоусова-Жаботинского [Жаботинский, Заикин 1971], [Winfree 1972], и в сердечной ткани [Alessie e.a. 1973].

Наиболее характерное свойство автоволнового вихря заключается в том, что он не является чем-то внешним по отношению к автоволновой среде, и возможность его существования заложена уже в самой способности среды к неоднократному проведению автоволн. Та условно говоря "точка", вокруг которой происходит циркуляция, не выделена никакими специальными свойствами, кроме своей предыстории, и любая другая точка могла бы взять на себя те же функции.

Автоволновой вихрь – более высокая иерархическая ступень самоорганизации по отношению к автоволнам. Он возможен

в не менее чем двумерных автоволновых средах, способных к многократному проведению автоволн. В отношении двумерных вихрей в литературе употребляется несколько названий - спиральные волны, ревербераторы, роторы, ведущие циклы и др. В данной работе будет употребляться термин "ревербератор", за исключением разделов, посвященных кардиологическим интерпретациям, где будет также использоваться термин "функционально определенное риэнтри".

Характерные параметры ревербератора - число заходов спирали ("топологический заряд") и характер излучаемых автоволн. Область, вокруг которой происходит циркуляция, называют ядром. Поведение среды в ней сильно отличается от поведения среды, просто проводящей плоские волны. В однородной среде ревербератор, как правило, стационарен, в том смысле что положение его ядра в среднем не меняется.

Некоторые биологические автоволновые среды существенно трехмерны. К ним относится и сердечная мышца крупных животных, в том числе человека. В таких средах также возможно существование источников вихревого типа [Медвинский и др. 1983], однако их разнообразие гораздо больше. Простейший трехмерный вихрь в однородной и изотропной автоволновой среде - так называемый простой свиток. Это режим, когда поведение среды не зависит от одной из координат (в подходящей системе), а в каждом сечении, перпендикулярном этой координате, наблюдается ревербератор. Ядру ревербератора в простом свитке отвечает целый цилиндр; этот цилиндр называют нитью вихря.

Возможны и более сложные вихревые режимы, которые можно рассматривать как обобщения простого свитка. Одним из общенных является скрученный свиток, отличающийся тем, что фаза

циркуляции меняется от сечения к сечению. Другое обобщение – свиток с изогнутой нитью. Возможны свитки, являющиеся одновременно изогнутыми и скрученными. Все такие режимы, как правило, уже не стационарны.

В настоящее время известно уже довольно много о свойствах автоволн как таковых и о существовании ревербераторов и свитков во многих автоволновых средах. Механизмы же эволюции автоволновых вихрей в результате внешних воздействий или под влиянием внутренних причин пока изучены недостаточно. В то же время такие вопросы представляют особый интерес не только в плане чистой науки, но и для практических приложений. В частности, как уже упоминалось, автоволновые вихри являются причиной таких опасных нарушений деятельности сердца, как пароксизмальная тахикардия и фибрилляция. С этой точки зрения проблема управления такими вихрями с целью их уничтожения является чрезвычайно актуальной.

В задачи данной диссертации входило как изучение общих законов эволюции автоволновых вихрей, так и возможностей практического применения этих законов для кардиологии. При этом главное внимание уделялось однородным и изотропным средам; более сложные эффекты, связанные с неоднородностью или анизотропностью реальных сред, выходит за рамки диссертации.

Основные результаты:

1. Получено обобщение уравнения эйконала для автоволн, учитывающее как процессы дисперсии автоволн, так и процессы их "диффузии". Использованный для вывода этого уравнения асимптотический метод имеет самостоятельное значение и используется в задачах об эволюции автоволновых вихрей.
2. Впервые аналитически (в рамках асимптотической

теории) рассмотрена задача о взаимодействии двумерного автоволнового вихря с границами среды и получены уравнения, описывающие дрейф этого вихря.

3. Обнаружен и объяснен эффект отражения вихря от границ среды в процессе его движения, вызванного периодическим (резонансным) внешним воздействием.

4. Аналитически исследована задача об автономной эволюции трехмерного автоволнового вихря. Получены более точные уравнения, описывающие эволюцию формы нити вихря и эволюцию его скрученности. Установлен ряд свойств этих уравнений.

5. В численном эксперименте исследовано поведение трехмерного вихря в среде, в которой нить имеет "отрицательное натяжение". Непосредственно показано, что вихрь с прямой нитью в такой среде неустойчив относительно искривления нити. Обнаружено, что при этом может наблюдаться "размножение" вихрей. Показано, что взаимодействие вихря с границей может погасить неустойчивость.

6. При помощи численного эксперимента исследованы некоторые механизмы действия таких методов борьбы с автоволновыми вихрями в сердце, как электростимуляция и дефибрилляция. Проведенные исследования позволяют предположить, что есть возможность сочетать широкий спектр применимости дефибрилляции с малым повреждающим действием электростимуляции.

Глава 1. ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ.

Литература по автоволнам обширна, и в печати опубликован целый ряд хороших обзоров. Здесь будут упомянуты лишь те работы, которые представляются автору близкими к содержанию диссертации либо с содержательной, либо с методологической стороны.

1.1. Автоволны.

Системы, способные к многократному проведению автоволн, многообразны. Здесь мы рассмотрим два наиболее изученных класса: возбудимые и автоколебательные системы.

а) Возбудимые среды.

Примеры возбудимых сред: нервная и сердечная ткани. Такие среды характеризуются тем, что в них есть устойчивое стационарное однородное состояние, и среда в этом состоянии может пребывать неограниченно долго ("состояние покоя"), однако относительно небольшого внешнего стимула достаточно, чтобы этот покой нарушить. Результатом такого воздействия может быть распространение в среде автоволн.

Существует ряд т.н. аксиоматических моделей возбудимых сред, основанных на их феноменологических свойствах. Эти модели могут давать качественные объяснения многим эффектам. В данной работе, однако, такие модели рассматриваться не будут, в связи с тем, что возможность не только качественно, но и количественно правильного моделирования реальных автоволновых процессов, а также надежность получаемых предсказаний связаны не с аксиоматическими моделями, а с моделями, исходящими из теоретических представлений о конкретных механизмах возбуждения и проведения в конкретных средах. Наиболее изученным классом моделей такого рода

являются системы уравнений в частных производных, так называемые системы "реакция-диффузия":

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \Delta u + f(u) \quad (1.1.1)$$

где $u=u(r,t)$, $f(u)$ - векторы-столбцы в пространстве концентраций: $u, f \in \mathbb{R}^l$; $D=\{D_{ij}\}$ - матрица ($l \times l$) коэффициентов диффузии, $r \in \mathbb{R}^n$, $n=1, 2$ или 3 - размерность физического пространства, Δ - лапласиан в нем.

Вопрос о существовании режимов в виде бегущей волны сводится к вопросу о существовании решений подходящего вида у системы обыкновенных уравнений порядка $2l$ (т.н. автомодельной системы):

$$Du'' + cu' + f(u) = 0, \quad (1.1.2)$$

где штрих означает производную по $\xi=x-ct$, c - скорость движения волны.

Еще один термин. Точечной системой, соответствующей (1.1.1), называется система обыкновенных уравнений порядка l , описывающая ее пространственно-однородные решения:

$$u' = f(u), \quad (1.1.3)$$

где штрих обозначает производную по времени.

Конкретный вид реакционных членов для нервной ткани был предложен Ходжкиным и Хаксли [Hodgkin, Huxley 1952].

Простейшей и наиболее популярной моделью возбудимой среды является система уравнений Фитчью-Нагумо [FitzHugh 1961, Nagumo e.a. 1962]:

$$\begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial t} = f(u_1) - u_2 + \Delta u_1, \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} = \varepsilon u_1, \end{cases} \quad (1.1.4)$$

Здесь функция $f(x)$ обладает следующими свойствами:

II

$f(0)=f(x_1)=f(x_2)=0$ (других корней нет), $0 < x_1 < x_2$, $f'(0) < 0$,
 $f'(x_1) > 0$, $f'(x_2) < 0$, $\int f(x) dx > 0$.

Такая система обладает качественными чертами системы уравнений Ходжкина-Хаксли. Моделируются пороговые свойства потенциала действия, абсолютная и относительная рефрактерность, и ряд других свойств, известных электрофизиологам.

б) Автоколебательные среды.

Пусть каждая точка среды является автоколебательным элементом, т.е. точечная система уравнений имеет устойчивый предельный цикл. Тогда состояния покоя может не быть и не приходится говорить об одиночных импульсах. Однако остается вопрос о наличии периодических бегущих волн.

Ряд результатов в этом направлении получен в работе Копель и Ховарда [Kopell, Howard 1973]. Там же был предложен простой класс моделей - так называемая λ - ω система:

$$\begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial t} = \lambda(\rho) u_1 - \omega(\rho) u_2 + \Delta u_1 \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} = \omega(\rho) u_1 + \lambda(\rho) u_2 + \Delta u_2 \end{cases} \quad (1.1.8)$$

где $\rho^2 = u_1^2 + u_2^2$, или для комплексной переменной $u = u_1 + i u_2$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = (\lambda + i\omega) u + \Delta u, \quad \lambda = \lambda(|u|), \quad \omega = \omega(|u|), \quad (1.1.8')$$

здесь $\lambda(0) > 0$, $\omega(0) \neq 0$, $\lambda(\rho)$ имеет изолированный ноль при $\rho = \rho_1$.

Следует отметить, что система ФитцХью-Нагумо (1.1.1, 1.1.4) может быть превращена в автоколебательную, если снять ограничение на расположение корней $f(x)$. Система при этом остается автоволновой. Похоже, что предельный цикл в автомодельной системе при переходе из области возбудимости в

область автоколебаний не качественно не меняется, и автоволны в этих областях качественно не различаются. Однако точные утверждения на этот счет автору неизвестны.

При малом удалении в параметрическом пространстве от многообразия бифуркации Хопфа точечная система имеет универсальный вид (т.н. "базовая модель"), колебания приближенно синусоидальны. Обобщение этого факта для распределенной автоколебательной системы было сделано, в частности, в работе Хагана [Hagan, 1982]. Базовое уравнение имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} = (\lambda_0 + i\omega_0) u - (\lambda_1 + i\omega_1) u|u|^2 + (1+i\beta) \Delta u \quad (1.1.9)$$

для комплексной амплитуды колебаний u ; здесь λ_0 – степень удаления от бифуркационного многообразия ("закритичность").

При $\beta=0$ (1.1.9) – частный случай (1.1.8') с $\lambda(\rho)=\lambda_0-\lambda_1\rho^2$, $\omega(\rho)=\omega_0-\omega_1\rho^2$. Изменением масштабов оно может быть приведено к виду

$$\frac{\partial u}{\partial t} = u(1-|u|^2) - i\alpha|u|^2 + (1+i\beta) \Delta u \quad (1.1.10)$$

с двумя безразмерными параметрами, учитывающими свойства конкретной системы. Следуя [Kuramoto, Tsuzuki 1975], это уравнение называют обобщенным уравнением Гинзбурга-Ландау, а коэффициенты β , α – линейной и нелинейной дисперсиями соответственно [Malomed 1984].

в) Некоторые свойства автоволн.

Автоволны в модели Винера-Розенблота обладают рядом свойств, отличающих их от линейных волн: они не сохраняют энергию, но сохраняют амплитуду и форму; они не удовлетворяют принципу суперпозиции, но удовлетворяют принципу Гюйгенса. Вследствие несоблюдения принципа суперпозиции нет эффектов интерференции и отражения;

вследствие соблюдения принципа Гюйгенса есть эффект огибания препятствий, похожий на линейный эффект дифракции. Перечисленные свойства распространяются (с некоторыми оговорками, см. ниже) и на автоволны в других моделях.

Как уже указывалось, скорость автоволн в системах "реакция-диффузия" есть величина не постоянная, но зависящая от кривизны их фронтов и от частоты их следования. Как уже указывалось, уточнением аксиоматических моделей Винера-Розенблота и τ -модели явились θ -модель, учитывающая зависимость скорости автоволны от частоты, и модель Михайлова, учитывающая зависимость от кривизны.

Для реакционно-диффузионных систем феноменологическая модель, учитывающая зависимость от кривизны и пренебрегающая зависимостью от частоты (асимптотически точная для редких волн в возбудимой среде) интенсивно исследовалась Зыковым, Михайловым, Давыдовым и Бражником. Аналогичный подход использовали также Тайсон и Кинер (подробнее см. ниже).

Другой подход - учет зависимости скорости от частоты в пренебрежении зависимостью от кривизны - реализован в т.н. приближении геометрической оптики [Howard, Kopell 1977].

Для длинных волн в автоколебательной среде могут быть одинаково существенны оба эффекта - т.е. зависимость скорости автоволны как от частоты, так и от кривизны их фронтов [Ortoleva, Ross 1973], [Kuramoto, Yamada 1976].

В упомянутых выше моделях зависимость скорости от кривизны имеет "нормальный" характер, т.е. для вогнутого фронта скорость больше, чем для выпуклого. В случае, если это не так, то прямой фронт волны становится неустойчивым, что приводит в образованию сложных структур на фоне фронта

и, возможно, его турбулизация [Kuramoto 1980], [Erneux, Matkowsky 1984].

И наконец, об эффекте аннигиляции и отсутствии отражения автоволн. Как и с постоянством скорости распространения, эти свойства, присущие модели Винера и Розенблота для других моделей могут требовать значительного уточнения. В этой связи упомянем две работы.

Лившиц [Livshits 1983] для автоволновой реакционно-диффузионной системы, не принадлежащей к двум описанным выше классам (в системе с т.н. коротковолновой неустойчивостью) построил одномерное решение, имеющее вид сталкивающихся автоволн равной частоты, причем область столкновения имеет большой размер, и аннигиляция происходит "постепенно".

Михайлов и Расул [1988] обратили внимание, что нечто похожее наблюдается и в обобщенном уравнении Гинзбурга-Ландау, если коэффициенты дисперсии малы. Они назвали этот эффект "частичным отражением".

1.2. Ревербераторы.

а) Существование ревербераторов в различных моделях.

После обнаружения ревербераторов в реакции Белоусова-Жаботинского был предпринят ряд попыток найти аналитические решения в виде ревербераторов в простых моделях типа "реакция-диффузия", например, в системе ФитцХью-Нагумо или $\lambda-\omega$ системе [Greenberg 1976], [Greenberg 1978], [Greenberg 1980], [Hagan 1982], [Mikhailov, Krinsky 1983] (здесь не перечислен целый ряд работ, посвященных поиску ревербераторных решений в "реалистичных" моделях).

Решения в виде ревербераторов для возбудимых реакцион-

но-диффузионных систем были получены в численных экспериментах [Гулько, Петров 1972], [Перцов, Панфилов 1981]. Ревербератору с аномально большим ядром соответствуют редкие волны, и применима макроскопическая модель Зыкова и Петрова [1977], учитываяющая зависимость скорости только от кривизны фронта. Будучи дополненной правилом, определяющим поведение обрыва фронта, в некотором специальном предельном случае эта модель позволяет получить простое аналитическое описание для ревербератора [Давыдов, Михайлов 1986]. Аналогичный подход был применен для описания ревербератора с нормальным (т.е. размером порядка 1) ядром в работе [Keener 1986].

б) Нестационарные ревербераторы.

В вышеупомянутых теоретических работах предполагалось, что вращение ревербератора является стационарным, т.е. он вращается как единое целое с постоянной частотой. Этому предположению соответствует решение системы (1.1.1) вида

$$u = U_r(\rho, m\vartheta - \omega t) \quad (1.2.1)$$

где функция U_r периодична по второму аргументу. Между тем и в натурных, и в численных экспериментах наблюдались и существенно иные режимы вращения, не являющиеся строго периодическими. Особенно это заметно вблизи ядра ревербератора, обрыв фронта описывает довольно прихотливую траекторию, которая напоминает циклоиду [Winfree 1972], [Roessler, Kahlert 1979], [Зыков 1987]. В последней из этих работ показано, что при некоторых значениях параметров может наблюдаться даже спонтанный направленный дрейф ревербератора. Однако такой дрейф наблюдается лишь при значениях параметров, лежащих на многообразиях коразмерности

1, в случае же общего положения ядро ревербератора остается в среднем в одном и том же месте. Теоретическое исследование таких режимов, очевидно, представляет гораздо большую трудность по сравнению со стационарным вращением. Зыков [1987] численно получил решения в виде нестационарного ревербератора в модели редких волн и большого ядра (см. выше), дополнив ее зависимостью скорости от времени после предыдущего прохода, подобно ϑ -модели.

в) Многорукавные ревербераторы.

Хаган [Hagan 1982] предсказал неустойчивость стационарно вращающегося ревербератора в обобщенном уравнении Гинзбурга-Ландау, если число рукавов больше одного. Однако доказательство Хагана ничего не говорит о том, что за режим должен возникать в результате такой неустойчивости.

Многорукавные ревербераторы наблюдали Кринский и Агладзе [Krinsky, Agladze 1983] в реакции Белоусова-Жаботинского. Их вращение было нестационарным.

Двухрукавные ревербераторы изучали в численных экспериментах Ермакова и др. [1987]. Они называли эти режимы связанными парами однозарядных вихрей. Эти режимы также были нестационарными.

Отметим, что двухрукавные вихри в химических экспериментах Кринского и Агладзе были более низкочастотными, чем однорукавные, а в численных экспериментах Ермаковой с соавт. - более высокочастотными.

1.3. Эволюция ревербераторов.

Мы видели, что в большинстве случаев одиничный ревербератор в однородной среде вращается стационарно и вокруг од-

ногого и того же центра. Иногда это может быть лишь стационарность в среднем, и центр вращения тоже лишь в среднем находится на одном месте. Мы будем называть все такие режимы свободными ревербераторами.

Если же свойства среды отличаются (т.е. среда неоднородна по свойствам, или ограничена), либо ревербератор подвержен внешним воздействиям, то наблюдаются два грубых эффекта: 1) изменение средней частоты ревербератора по сравнению со свободным, 2) направленный дрейф ревербератора.
а) Дрейф в неоднородности.

Явление дрейфа ревербератора при наличии неоднородности наблюдается уже в Т-модели [Кринский 1968]. Такой дрейф изучался в численных экспериментах [Руденко, Панфилов 1983]. В макроскопической модели редких волн и большого ядра (см. выше), с некоторыми дополнительными предположениями Давыдов и др. [1988] дали аналитические оценки для такого дрейфа.

б) Резонансный дрейф.

В этой же работе Давыдова с соавт. было показано, что направленный дрейф возникает также и при периодическом изменении свойств среды, если период этих изменений совпадает с периодом самого ревербератора. Направление дрейфа зависит от соотношения фаз ревербератора и изменений среды. Если же периоды не совпадают, то происходит дрейф по окружности (радиус окружности обратно пропорционален разнице частот). Эти явления были обнаружены в химическом эксперименте [Агладзе и др., 1987].

в) Взаимодействие ревербераторов.

В отношении взаимодействия ревербераторов друг с другом нужно иметь в виду два существенно разных случая. Если час-

тоты ревербераторов равны (т.е. если их топологические заряды одинаковы по абсолютной величине), то будут наблюдаться эффекты "мягкого" взаимодействия друг с другом, типа тех, что описаны в работе Ермаковой и др. [1987] – практическое безразличие ревербераторов на далеких расстояниях, отталкивание или притяжение на близких (с боковой компонентой дрейфа), в последнем случае – образование связанных пар типа двухрукавного ревербератора при одинаковых топологических зарядах или спонтанно дрейфующей пары при противоположных. Здесь уместно отметить, что взаимодействие ревербератора с прямой непроницаемой границей с математической точки зрения эквивалентно взаимодействию противоположно заряженных ревербераторов в случае строгой зеркальной симметрии последних. Такое взаимодействие изучалось в другой работе этих авторов [Ермакова, Перцов 1986].

Автору настоящей работы неизвестны сколько-нибудь убедительные аналитические работы о взаимодействии ревербераторов между собой или с границей. В.А.Давыдов в частном сообщении указал, что такую теорию удается построить в модели редких волн и большого ядра.

г) Вынужденный дрейф.

В случае же ревербераторов с существенно разными частотами – например, если различны их топологические заряды или если они находятся в частях среды с разными свойствами – главным эффектом является эффект синхронизации всей среды наиболее высокочастотным источником [Кринский 1968]. Ведущие центры (источники невихревой природы, излучающие концентрические волны) после подхода к ним ударной структуры – границы областей влияния собственной и внешней, более

высокочастотной, волны – просто подавляются. Такой эффект можно наблюдать на химической возбуждимой среде (см., например, [Ivanitsky e.a. 1981]).

Ревербератор, однако, таким путем уничтожен быть не может, благодаря своему топологическому заряду (у ведущего центра топологический заряд нулевой). В случае, когда на ревербератор набегают волны с частотой, превышающей его собственную, его топологический заряд превращается в дислокацию в упорядоченной картине высокочастотных волн, которая дрейфует со скоростью, зависящей от частоты набегающих волн, и в случае прекращения цуга падающих волн ревербератор "возрождается" на новом месте – эффект вынужденного дрейфа [Krinsky, Agladze 1983]. Естественно, природа высокочастотного источника здесь совершенно не важна. Полуаналитическая модель процесса вынужденного дрейфа, идейно близкая к модели длинных волн и большого ядра, предложена в работе Ермаковой и др. [1986].

1.4. Свитки.

Тривиальный пример трехмерного автоволнового источника – решение, которое не зависит от одной из пространственных координат, а в сечении, перпендикулярном этой координате представляет из себя ревербератор.

Винфри [Winfree 1973] указал, что простые свитки далеко не исчерпывают качественного многообразия возможных в трехмерной среде источников, приведя фотографии реакции Белоусова-Жаботинского, на которых видны источники типа вытянутых спиралей и вытянутых колцевых источников. Эти фотографии можно интерпретировать, предположив, что это –

тражение на поверхности изогнутых или выходящих на поверхность под углом свитков. Это предположение было подтверждено экспериментом. Позднее были обнаружены и более возможные источники [Welsh e.a. 1983].

Бинфри и Строгатц [Winfree, Strogatz 1983] провели классификацию возможных трехмерных источников, исходя из феноменологических представлений. Исходя из этих представлений задача сводится к классификации кривых, которые являются краями волновых фронтов (или нитями вихрей, как мы их будем дальше называть). Эти нити могут быть замкнутыми, могут быть переплетены друг с другом, или быть завязанными в узлы и т.д. Каждая нить может нести различный топологический заряд (число рукавов ревербератора, который будет виден в сечении близи такой нити), а также может быть скручена (в разных сечениях ревербераторы врачаются в разной фазе). Скрученность (набег фазы на единицу длины нити) сама по себе не является топологическим инвариантом, однако таким инвариантом является его интеграл для замкнутых нитей.

Таким образом, для трехмерных вихрей - свитков имеется "континуум степеней свободы": грубо говоря, свой набор характеристик для каждой точки нити свитка. Локальными характеристиками при этом являются - степень изогнутости нити и скрученность.

Однако, если в однородной среде ревербератор "сохраняет" свои характеристики, то свиток, построенный вокруг нити произвольной формы и с произвольной скрученностью, будет эволюционировать. Об этих эффектах речь пойдет в следующем разделе.

1.5. Эволюция свитков.

а) Прямые скрученные свитки.

Михайлов и др. [Mikhailov e.a. 1985] получили оценки для зависимости частоты вращения свитка от его скрученности для модели, разобранной в [Mikhailov, Krinsky 1983]. Частота вращения скрученного свитка оказалась тем больше, чем больше скрученность. При малой скрученности частота зависит от нее квадратичным образом.

В этой же работе (см. также [Панфилов и др., 1984]) описан метод исследования таких решений в численном эксперименте: оказалось, что вихрь в однородной среде с граничными условиями типа Неймана стационарно не существует ("раскручивается"). Однако такое решение удалось получить в численном эксперименте, изменив граничные условия. Точнее говоря, моделировалась среда, состоящая из двух половинок с разными свойствами. В такой среде удается получить решение, которое в одной из половинок является скрученным свитком. Параметры такого решения находятся в качественном соответствии со сделанными аналитическими оценками.

Бражник и др. [1987] в модели редких волн и большого ядра, наряду с другими результатами, построили теорию скрученного вихря. Они получили, что частота линейно зависит от абсолютной величины скрученности.

Они обратили внимание также, что дисперсионное соотношение для свитка с постоянной скрученностью, т.е. зависимость частоты, как производной от фазы по времени, от скрученности, как от производной от фазы по координате вдоль нити – можно рассматривать как эволюционное уравнение для фазы, а его производную вдоль нити – как эволюционное

уравнение для скрученности.

б) Изогнутые свитки.

Панфилов и Перцов [1984] в модели типа ФитцХью-Нагумо численно моделировали вихрь, нить которого замкнута в кольцо. Оказалось, что такой вихрь не вращается стационарно, а сокращает свой радиус и дрейфует вдоль своей оси симметрии. Скорости обоих процессов при больших радиусах хорошо описываются обратной пропорциональностью от радиуса кольца. В результате кольцо через конечное время погибает. В случае, если кольцевой свиток скручен, эти закономерности остаются в силе, но константы дрейфов ниже [Панфилов и др., 1985]. В другой работе [Panfilov, Rudenko 1987] была исследована зависимость констант сокращения и бокового дрейфа от параметров среды. Оказалось, что для плохо возбудимой среды, для которой существует аномальный ревербератор, происходит не сжатие, а расширение кольца. Все эти эксперименты проводились в предположении аксиальной симметрии.

Якушевич [Yakushevich 1984] получила для уравнения Гинзбурга-Ландау уравнение эволюции для почти прямой нити, описываемой функциями $x(z,t)$, $y(z,t)$, которое оказалось уравнением диффузии для функций x , y . Этот результат был обобщен Киннером [Keener 1988] для общей системы "реакция-диффузия", который включил в рассмотрение также и малую скрученность свитка. Панфилов с соавт. [1986] указали, что в средах с равными коэффициентами диффузии всех компонент коэффициент "диффузии" нити совпадает с ними, а боковой дрейф отсутствует.

Мы видели, однако, что отличие матрицы диффузии от ска-

лярной приводит к качественным различиям: появляется боковой дрейф, и скорость сокращения может не только измениться по величине, но и поменять знак.

Бражник и др. [1987] построили теорию эволюции кольцевого свитка в модели редких волн и большого ядра. В этой модели получаются как сокращение, так и боковой дрейф; при некоторых параметрах сокращение может сменяться расширением. Авторы высказали предположение, что когда имеется расширение кольцевого свитка простой свиток должен быть неустойчив. В этой же работе было объявлено о наблюдении кольца, которое имеет устойчивый (относительно маленький) радиус. Параметры среды при этом близки к границе, за которой вместо сжатия кольца имеет место расширение.

Результаты некоторых расчетов для трехмерной возбудимой среды представили Нандапуркар и Винфри [Nandapurkar, Winfree 1987]. Они наблюдали такие эффекты, как дрейф скрученного кольцевого свитка, "надетого" на незамкнутую нить другого свитка сложной формы; дрейф связанной пары скрученных замкнутых свитков и их превращение в простой замкнутый свиток; "развязывание" свитка, нить которого завязана узлом. Особенно интересен расчет, в котором наблюдался скрученный кольцевой свиток со стабильным радиусом, для среды, находящейся довольно далеко от границы "расширения" для незакрученного кольцевого свитка.

Глава 2. ЭВОЛЮЦИЯ МЕДЛЕННО МЕНЯЮЩИХСЯ АВТОВОЛН.

2.1. Общие положения.

В главах 2-4 применяются методы возмущений к анализу медленной эволюции автоволновых режимов. Такого рода задачи характерны тем, что в процессе эволюции в каждый момент времени режим в каком-то смысле близок к некоторому "эталонному", который является решением более простой ("стационарной") задачи. При этом существует ряд закономерностей, которые не слишком зависят от конкретного вида системы уравнений. Ясно, что такие закономерности интересны в первую очередь; поэтому мы всегда будем стараться производить анализ в максимально общих предположениях — настолько, насколько это позволяет физический смысл.

Простейшим и наиболее характерным свойством автоволновых сред является их способность проводить плоские периодические волны. Поэтому задача о решениях, близких к плоским периодическим волнам, является простейшей и первоочередной. Эта задача тем более актуальна, что и в более сложных режимах мы имеем дело с такими волнами.

Этой задаче и посвящена данная глава. В главе 4 будет использован метод, аналогичный использованному здесь при выводе эволюционного уравнения для медленно меняющихся автоволн (ММАВ). Здесь этот метод будет описан и обоснован более подробно.

Всюду в этой главе мы предполагаем, что среда описывается системой уравнений типа "реакция-диффузия" (1.1.1). Для этой системы считается известным семейство решений в виде плоских периодических волн, т.е. решений вида

$$u(r, t) = U((k, r) - \omega(k^2)t, k^2), \quad k \in \mathbb{R}^n, \quad (2.1.1)$$

для k^2 , лежащих в некотором интервале. Скобки $(,)$ здесь и далее означают скалярное произведение в \mathbb{R}^n . Для того, чтобы (2.1.1) было решением (1.1.1), функция двух переменных $U(\xi, \eta)$ должна удовлетворять уравнению

$$\eta D U_{\xi\xi}(\xi, \eta) + \omega(\eta) U_\xi(\xi, \eta) + f(U(\xi, \eta)) = 0. \quad (2.1.2)$$

Поскольку речь идет о периодических волнах, считаем, что

$$U(\xi + 2\pi, \eta) \equiv U(\xi, \eta), \quad (2.1.3)$$

Кроме того, будем предполагать, что решения (2.1.1) системы (1.1.1) устойчивы в линейном приближении со сдвигом.

Заметим, что выбор $U(\xi, \eta)$ неоднозначен: если некоторая функция U удовлетворяет (2.1.2, 2.1.3) то функция U^K , получаемая преобразованием

$$U^K(\xi, \eta) = U(\xi + K(\eta), \eta) \quad (2.1.4)$$

(калибровкой фазы) также удовлетворяет этим соотношениям при произвольной функции $K(\eta)$.

2.2. Уравнение эволюции для ММАВ: постановка задачи.

Медленно меняющимися автоволнами (ММАВ) будем называть функции вида

$$u(r, t) = U(\varphi, (\nabla \varphi)^2) + v(r, t) \quad (2.2.1)$$

где $\nabla \varphi$ — медленно меняющийся в пространстве и во времени "локальный волновой вектор". Будем считать, что

$$\varphi = \varepsilon^{-1} \Phi(\varepsilon r, \varepsilon t, \varepsilon), \quad \varepsilon \ll 1, \quad v \ll 1. \quad (2.2.2)$$

Мы увидим, что при условии (2.2.2) v имеет порядок

малости ϵ и приблизительно периодична в направлении градиента ϕ .

Здравый смысл подсказывает, что если начальные условия для уравнения (1.1.1) являются ММАВ, то решение этого уравнения в течение долгого времени почти везде будет оставаться ММАВ. Поэтому привлекательным явились бы описание автоволнового поля в терминах одной только фазы ϕ как макроскопического "параметра порядка".

В таком виде задача уже была поставлена в работе [Howard, Koppell 1977] (далее скращенно НК). Однако полученное там эволюционное уравнение для ϕ типа уравнения Гамильтона-Якоби (в нулевом порядке по ϵ) очень грубо и не учитывает, например, такого характерного для автоволн свойства, как зависимость скорости от кривизны фронтов. Учет следующих порядков теории возмущений не спасает положения: в каждом порядке по ϵ имеем для соответствующей поправки к ϕ уравнение первого порядка, в то время как эффекты типа зависимости скорости от кривизны могут, по-видимому, быть получены лишь в параболических уравнениях.

Учет таких эффектов производится в ряде других "макроскопических моделей" возбудимых сред [Зыков, Петров 1977, Kuramoto 1980, Keener 1986 и др.]. Однако в этих работах, наоборот, в стороне остается эффект зависимости скорости автоволн от частоты их следования - тот самый эффект, который единственно и служит объектом описания в НК.

В эволюционном уравнении для параметра порядка желательно учесть оба эти эффекта. Легко написать феноменологическое уравнение, удовлетворяющее этому условию. Однако нельзя быть уверенным в том, что не оказались

неучтеными еще какие-то эффекты. Поэтому предпочтительнее вывести такое уравнение как асимптотически точное.

Ниже такое уравнение будет получено. Используемый подход близок, с одной стороны, к методу НК, а с другой - к [Kuramoto, 1980].

2.3. Эвристический вывод уравнения ММАВ.

а) Линейное приближение по v .

Подставляя (2.2.1) в (1.1.1), получим одно векторное (\mathbb{R}^l) уравнение для двух неизвестных функций: вектор-функции $v \in \mathbb{R}^l$ и скалярной функции φ . Учтем малость v и ограничимся линейным приближением по этой переменной. Полученное уравнение перепишем в виде уравнения для v :

$$v_t(r, t) = D \nabla^2 v(r, t) + F[\varphi] v + h[\varphi], \quad (2.3.1)$$

где матрица F и свободный член h определяются видом неизвестной функции φ :

$$F[\varphi] = \frac{\partial f(u)}{\partial u} \Big|_{u=U}; \quad (2.3.2)$$

$$h[\varphi] = -(\omega((\nabla\varphi)^2) + \varphi_t) U_\xi - U_\eta \frac{\partial}{\partial t} (\nabla\varphi)^2 + \quad (2.3.3)$$

$$+ D(U_\eta \nabla^2(\nabla\varphi)^2 + 2U_{\xi\eta}(\nabla\varphi, \nabla((\nabla\varphi)^2)) + U_\xi \nabla^2\varphi + U_{\eta\eta}(\nabla((\nabla\varphi)^2))^2)$$

В (2.3.2), (2.3.3) у функции U подразумеваются аргументы $U=U(\varphi, (\nabla\varphi)^2)$. В (2.3.3) $f(u)$ отсутствует благодаря учету соотношения (2.1.2).

б) Устранение векового роста.

Недоопределенность уравнения (2.3.1) снимается следу-

ющим рассуждением. В это уравнение можно подставлять любые функции $\varphi(r, t)$. Но не при любой подстановке решение v , найденное из (2.3.1), будет оставаться малым; а это необходимо для справедливости линейного приближения и в силу определения ММАВ. Условие ограниченности (малости) v требует от функции φ соблюдения определенных условий. Эти условия и дадут недостающее к (2.3.1) уравнение для φ и одновременно искомое эволюционное уравнение.

Если $\varphi(r, t)$ фиксировано, то уравнение (2.3.1) является линейным неоднородным уравнением для v . В силу медленности изменения локального волнового вектора $k = \nabla\varphi$, матрица и свободный член в (2.2.3) в большой области близки к периодическим: с периодом $2\pi/|k|$ по пространству и с периодом $2\pi/\omega$ по времени.

В данном эвристическом рассуждении рассмотрим условие ограниченности v в предположении, что F и h являются точно периодическими с указанными периодами. Точнее, будем считать функцию $\varphi(r, t)$, входящую в качестве аргумента функции U в (2.3.2) и (2.3.3), линейной; а производные от нее (в том числе и выше первой!!) - постоянными; эти производные в дальнейшем будут выступать лишь в качестве параметров, вплоть до получения замкнутого уравнения для φ . Другими словами, во всех местах входящия φ в (2.3.2), (2.3.3) учтем лишь главные члены. Для $(\nabla\varphi)^2$ введем специальное обозначение $(\nabla\varphi)^2 = \eta$.

Далее перейдем в движущуюся систему отсчета - к новым независимым переменным (τ, ξ, q) , где $\tau = t$, $\xi = \varphi(r, t) \approx (k, r) - \omega(k^2)t$, и через q обозначены все остальные пространственные координаты, ортогональные вектору k . После

этого коэффициенты F и свободный член h становятся функциями только от независимой переменной ξ .

После этих процедур (2.3.1) приобретает вид

$$v_t = \eta D v_{\xi\xi} + D \Delta_q v + \omega v_\xi + F(\xi) v + h(\xi) \quad (2.3.4)$$

(в аргументах для краткости опускаем зависимость от параметров, какими являются производные от функции Φ).

Устойчивость со сдвигом по линейному приближению означает, что спектр этого уравнения лежит в левой полуплоскости, за исключением точки 0, соответствующей "сдвиговой моде"

$$V(\xi, \eta) \equiv U_\xi(\xi, \eta) \quad (2.3.5)$$

(которая соответствует малому сдвигу возмущаемой функции U вдоль Γ или вдоль t). Однородное уравнение, соответствующее (2.3.4), следовательно, описывает "вымирание" всех Фурье-компонент функции v (в базисе собственных функций), за исключением сдвиговой моды (2.3.5)

Правда, поскольку 0 не является изолированным собственным значением уравнения (2.3.4), рассматриваемого во всем пространстве, то имеются моды, отличные от (2.3.5), но затухающие сколь угодно медленно. Однако эти моды при надлежащей нормировке оказываются сколь угодно близки к (2.3.5) в любой наперед заданной ограниченной области. Поэтому для любых разумных начальных данных решение однородного уравнения, соответствующего (2.3.4), в каждой ограниченной области со временем приближается к (2.3.5) с некоторым коэффициентом, который зависит от области. Другими словами, это решение представляет из себя "модулированную волну", составленную на основе (2.3.5), причем глубина модуляции со временем уменьшается.

Рассмотрим теперь неоднородное уравнение (2.2.6). Поскольку свободный член h , как и коэффициенты F являются периодическими функциями ξ , то существует частное решение, периодически зависящее от ξ (и не зависящее от q). Чтобы это решение было ограниченным во времени, необходимо и достаточно, чтобы свободный член был ортогонален сдвиговой моде:

$$\phi \langle W(\xi, \eta), h[\varphi] \rangle d\xi = 0, \quad (2.3.6)$$

где $W(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^l$ – собственная функция сопряженного к (2.3.4) однородного линейного уравнения, соответствующая собственному значению 0, взаимная к сдвиговой моде. Под \langle , \rangle здесь и далее имеется в виду скалярное произведение в пространстве концентраций \mathbb{R}^l , а под кольцевым интегралом – интеграл по периоду.

Решение полного уравнения (2.3.4), таким образом, по прошествии большого по сравнению с 1 времени получается приближенно периодической по ξ функцией, медленно зависит от t и q , и имеет порядок величины ε (порядок величины свободного члена h) – при условии, что начальные условия для этого уравнения также не превышают по порядку величины ε .

Условие (12), после "размораживания" производных от φ представляет из себя уже замкнутое уравнение для φ , не зависящее явно от r и t , т.е. уже может использоваться в качестве эволюционного уравнения.

в) Окончательное уравнение.

Выберем нормировку "левой" собственной функции так, чтобы

$$\oint \langle W(\xi, \eta), V(\xi, \eta) \rangle d\xi = 1 \quad (2.3.7)$$

Кроме того, структура эволюционного уравнения несколько упростится, если потребовать (как и в НК), чтобы

$$\oint \langle W(\xi, \eta), U_\eta(\xi, \eta) \rangle d\xi = 0 \quad (2.3.8)$$

Для того, чтобы обеспечить выполнение этого условия, нужно воспользоваться произволом (2.1.4), правильно выбрав функцию $K(\eta)$. Такой выбор всегда возможен в силу условия (2.3.7).

И, наконец, ограничимся учетом членов порядка $O(1)$ и $O(\varepsilon)$. После этого уравнение (2.3.6) примет вид:

$$\begin{aligned} \varphi_t + \omega((\nabla\varphi)^2) &= P((\nabla\varphi)^2) \nabla^2\varphi + \\ &+ Q((\nabla\varphi)^2) (\nabla\varphi\nabla) (\nabla\varphi)^2. \end{aligned} \quad (2.3.9)$$

Перепишем это в эквивалентной форме, в виде векторного уравнения для локального волнового вектора $\mathbf{k}(\mathbf{r}, t) \equiv \nabla\varphi$:

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_t &= \text{grad}(-\omega(\mathbf{k}^2) + P(\mathbf{k}^2) \text{div } \mathbf{k} + \\ &+ Q(\mathbf{k}^2) (\mathbf{k}, \text{grad}(\mathbf{k}^2))) \end{aligned} \quad (2.3.9')$$

Здесь обозначены коэффициенты:

$$P(\eta) = \oint \langle W(\xi, \eta), D U_\xi(\xi, \eta) \rangle d\xi; \quad (2.3.10)$$

$$Q(\eta) = 2 \oint \langle W(\xi, \eta), D U_{\xi\eta}(\xi, \eta) \rangle d\xi;$$

Заметим, что если $D_{ij} = \delta_{ij}$, то $P = d$.

г) Физический смысл членов эволюционного уравнения.

Член $\omega(\mathbf{k}^2)$ порядка $O(1)$ определяет, что скорость изме-

нения фазы в основном определяется частотой, присущей плоским периодическим волнам с данным локальным волновым числом, т.е. дисперсионной зависимостью. Поэтому этот член естественно назвать дисперсионным.

Два члена в правой части имеют порядок $O(\varepsilon)$ и обращаются в 0 для плоских периодических волн. Благодаря этим членам уравнение становится параболическим, поэтому их естественно назвать диффузионными. То, что их именно два - по существу и соответствует двум разным физическим процессам: продольной и поперечной диффузии автоволн. В самом деле, рассмотрим эволюцию плоских, но не периодических волн. Для этого случая (2.3.9') переписывается в виде

$$\frac{\partial k}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\omega(k^2) + R(k^2) \frac{\partial k}{\partial x} \right) \quad (2.3.11)$$

- уравнения нелинейной диффузии со сносом, причем коэффициент нелинейной диффузии равен

$$R(\eta) = P(\eta) + 2\eta Q(\eta) \quad (2.3.12)$$

Эту диффузию естественно назвать продольной, т.к. она зависит только от изменения волнового вектора вдоль него самого, и не зависит от его изменения вдоль волновых фронтов.

Наоборот, пусть в какой-то момент времени модуль локального волнового вектора одинаков во всей рассматриваемой области. Тогда имеем в этот момент

$$\frac{\partial k}{\partial t} = P \nabla (\nabla, k) \quad (2.3.13)$$

В этом случае волновая диффузия происходит лишь в результате изменчивости направления локального волнового вектора, а не его величины; такой процесс естественно назвать поперечной

диффузией. Этот процесс определяет зависимость скорости автоловн от кривизны их фронтов.

2.4. Более строгий вывод уравнения ММАВ.

а) Исходные положения.

В проведенных в предыдущем разделе рассуждениях остались обойденными ряд вопросов: почему при записи окончательного уравнения (2.3.9) мы ограничились учетом членов порядка ε ? получили бы мы правильное уравнение, если бы учли еще и члены порядка ε^2 ? и, наконец, риторический: если бы мы на данном этапе вообще не отбрасывали члены, получили ли бы мы абсолютно точное уравнение?

Основным пунктом в эвристическом выводе, помимо идеи уничтожения векового роста, является процедура "замораживания" и "размораживания" производных от Φ . Эта процедура выглядит несколько искусственной, особенно при учете того факта, что пренебрегая непериодичностью F и h мы уже на одном периоде совершаляем ошибку порядка ε , в то время как в окончательном уравнении члены порядка ε сохранены. Ясно, что даже если полученное уравнение (2.3.9) правильное, то подобные рассуждения во всяком случае не позволяют получить асимптотически более точные уравнения, если такие потребуются.

Ниже будет проведен более строгий вывод, будет дана асимптотическая оценка точности полученного уравнения. А именно, мы покажем, что функция $\Phi(r, t, \varepsilon)$ при всех r и t удовлетворяет соотношению (2.3.9) с ошибкой, не превышающей по порядку величины ε^2 .

Ограничимся для краткости случаем одной пространственной переменной. При этом мы используем сведения относительно

характера функции v , полученные при эвристическом выводе. Примем без доказательства, что

$$v = \mathcal{O}(\varepsilon)$$

$$v(x+2\pi/\varphi_x(x), t) - v(x, t) = \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad (2.4.1)$$

(последнее предположение будет уточнено ниже, см. Замечание 1 к п."в").

6) Основная идея: запрет на сдвиговую моду.

Заметим, что в уравнении для Φ нас интересуют члены до порядка ε включительно. Но при работе с такой точностью представление (2.2.1, 2.2.2) не является однозначным. В самом деле, добавим к Φ произвольную достаточно гладкую функцию, не превышающую по порядку величины ε . Это изменение может быть скомпенсировано изменением добавки v таким образом, чтобы функция u , определенная согласно (2.2.1), осталась без изменения:

$$\begin{aligned} u &= U(\varphi, \varphi_x^2) + v = \\ &= U(\varphi + \varepsilon \chi, (\varphi_x + \varepsilon \chi_x)^2) + v \\ &\quad - \varepsilon U_\xi(\varphi, \varphi_x^2) \chi - 2 \varepsilon U_\eta(\varphi, \varphi_x^2) \varphi_x \chi_x + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \end{aligned} \quad (2.4.2)$$

Требование (2.4.1) при этом не нарушается.

Для достижения требуемой точности эту неоднозначность необходимо устранить. Преобразование (2.4.2) приводит, в частности, к добавлению к v модулированной волны, составленной на основе сдвиговой моды (2.3.5). Поэтому неоднозначность можно устранить, потребовав, чтобы в v компонента вдоль сдвиговой моды с необходимой точностью отсутствовала.

Этим требованием мы заменим использованную при эвристическом выводе процедуру устранения векового роста. Как мы видели, "опасной" в отношении роста частью добавки v является именно сдвиговая мода. Потребовав, чтобы амплитуда этой моды все время оставалась мала, мы тем самым гарантируем и малость v . И наоборот, если при некоторой функции $\varphi(x,t)$ функция v остается малой, то небольшим изменением φ мы всегда можем амплитуду сдвиговой моды с необходимой точностью свести к нулю.

в) Детектирующее преобразование.

Придадим требованию отсутствия сдвиговой моды более точный смысл. Для этого определим линейный оператор, имеющий свойства "детектора" сдвиговой моды с точностью ε^2 . Это удобно сделать, перейдя от независимых переменных x, t к переменным $\xi = \varphi(x, t, \varepsilon), \tau = t$. Тогда в качестве искомого оператора \mathfrak{D} можно взять

$$\mathfrak{D}(\tau, \varepsilon) g(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{\xi-\pi}^{\xi+\pi} d\eta \int_{\eta-\pi}^{\eta+\pi} d\zeta (W(\zeta, k^2), g(\zeta)), \quad (2.4.3)$$

где

$$k = (\partial x / \partial \varphi)^{-1} = k(\varepsilon\xi, \varepsilon\tau, \varepsilon) \quad (2.4.4)$$

Более точно, детектирующее свойство этого оператора состоит в следующем. Пусть для некоторого фиксированного τ функция $g(\xi, \varepsilon) \in \mathbb{R}^l$ представлена в виде

$$g(\xi, \varepsilon) = \sum_t A_t(\varepsilon\xi, \varepsilon) V_t(\xi, k^2(\varepsilon\xi, \varepsilon\tau, \varepsilon)) = \mathcal{O}(1) \quad (2.4.5)$$

где $V_t(\xi, \eta)$ - собственные функции уравнения (2.3.4), $V_0(\xi, \eta) = \partial U(\xi, \eta) / \partial \xi$. Тогда

$$\mathfrak{D} g = A_0 + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad (2.4.6)$$

Действительно, интеграл по ζ в (2.4.2) уже является "детектирующим" оператором с точностью ε благодаря тому, что функция $W(\xi, \eta)$ входит в состав базиса в пространстве периодических функций, взаимного к базису V_t , (для доказательства этого факта можно использовать тейлоровские разложения медленно меняющихся функций относительно середины промежутка интегрирования).

Этот оператор еще не удовлетворяет свойству (2.4.6): он дает "ошибку детектирования" порядка ε , а не ε^2 . Однако эта ошибка имеет в порядке $\mathcal{O}(\varepsilon)$ осциллирующий характер, и дополнение интеграла по ζ скользящим усреднением по периоду, т.е. интегралом по η в (2.4.3), приводит уже к требуемой точности ε^2 (доказательство аналогично; исчезновение порядка ε после усреднения можно увидеть, изменив порядок интегрирования в соответствующем интеграле).

Теперь требование однозначности представления (2.2.1) сформулируем следующим образом:

$$\mathfrak{D}(\tau, \varepsilon) v(\xi, \tau, \varepsilon) = \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad (2.4.7)$$

Условию (2.4.7) всегда можно удовлетворить, используя преобразование (2.4.2). Для этого в качестве добавки χ к фазе φ нужно выбрать как раз амплитуду сдвиговой моды в добавке v . Член в (2.4.2), пропорциональный χ_x , не играет роли: так как выполнено условие (2.3.8), то функция $\partial U / \partial \eta$ может быть разложена в ряд по V_t без участия V_0 , и следовательно, "вырезается" детектирующим преобразованием.

Замечание 1. Здесь мы принимаем без доказательства, что добавка v может быть при всех τ представлена в виде (2.4.4).

Это предположение уточняет сделанное ранее (2.4.1).

Замечание 2. Строго говоря, для устранения неоднозначности с точностью до ε^2 достаточно было бы детектирующего преобразования точности ε , т.к. сама добавка уже имеет порядок малости ε . Однако второй порядок точности понадобится нам в дальнейшем, когда потребуется, чтобы и свободный член в линейном уравнении для v также не содержал сдвиговой моды в порядке $\mathcal{O}(\varepsilon)$.

Замечание 3. Аналогичным образом можно построить "детекторы" и для других мод. Для этого вместо $W_0=W$ - левой собственной функции, взаимной к сдвиговой моде, в (2.4.3) нужно подставлять другие левые собственные функции. Доказательство соответствующих соотношений производится дословно так же, как и для сдвиговой моды.

г) Вывод уравнения.

Итак, пусть функция u вида (2.2.1) удовлетворяет уравнению (1.1.1), причем выполнены условия (2.2.2, 2.4.1, 2.4.7). В качестве независимых переменных выберем $\xi=\varphi(x, t)$, $t=t$. Тогда добавка v удовлетворяет следующему асимптотическому соотношению:

$$v_t = k^2(\varepsilon\xi, \varepsilon t, \varepsilon) D v_{\xi\xi} + \Omega(\varepsilon\xi, \varepsilon t, \varepsilon) v_\xi + F(\varepsilon\xi, \varepsilon t, \varepsilon) v \\ + h(\xi, k(\varepsilon\xi, \varepsilon t, \varepsilon), \partial k(\varepsilon\xi, \varepsilon t, \varepsilon)/\partial\xi, \Omega(\varepsilon\xi, \varepsilon t, \varepsilon)) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad (2.4.8)$$

Здесь k , определенное в (2.4.5), и Ω , определенное как

$$\Omega(\varepsilon\xi, \varepsilon t, \varepsilon) = (\partial t/\partial\varphi)^{-1} \quad (2.4.9)$$

- известные медленно меняющиеся функции.

Применим к обеим частям (2.4.8) оператор \mathfrak{D} . В результате, после несложных выкладок, получим:

$$[\Omega(\varepsilon\xi, \varepsilon t, \varepsilon) - \omega(k^2(\varepsilon\xi, \varepsilon t, \varepsilon))] \mathfrak{D} v_t + \mathfrak{D} h = \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad (2.4.10)$$

Переписав это соотношение в виде

$$\mathfrak{D} h = \mathcal{O}(\varepsilon) \quad (2.4.11)$$

и выпишав члены порядка 1, входящие в h , мы придем к выводу, что

$$\Omega(\varepsilon\xi, \varepsilon t, \varepsilon) - \omega(k^2(\varepsilon\xi, \varepsilon t, \varepsilon)) = \mathcal{O}(\varepsilon) \quad (2.4.12)$$

После подстановки (2.4.12) обратно в (2.4.10) получим, что

$$\mathfrak{D} h = \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad (2.4.13)$$

Остается убедиться, что (2.4.13), после учета детектирующего свойства (2.4.7) оператора \mathfrak{D} , медленности функций k и Ω и перехода к исходным независимым переменным x, t приводит к соотношению

$$\varphi_t = -\omega(\varphi_x^2) + R(\varphi_x^2)\varphi_{xx} + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad (2.4.14)$$

которое после дифференцирования по x совпадает с уравнением (2.3.14), где

$$R(\eta) = P(\eta) + 2\eta Q(\eta). \quad (2.4.15)$$

д) Обсуждение.

Асимптотическая оценка (2.4.14) подтверждает корректность эвристической процедуры устранения векового роста для получения эволюционного уравнения с точностью до членов порядка ε^2 . Невязка в эволюционном уравнении (2.3.9) много меньше учтенных в нем членов. В случае, если точное решение

достаточно долго остается ММАВ (т.е. не возникают ударные структуры), то полученное уравнение дает правильные предсказания на временах $O(\varepsilon^{-2})$, тогда как без учета "диффузионных" членов это будут лишь времена $O(\varepsilon^{-1})$.

Примененная здесь методика, связанная с построением детектирующего оператора, позволяет получать и более точные эволюционные уравнения. Новые обстоятельства, которые возникают на этом пути: 1) Необходимость построения более точных детектирующих операторов, 2) Необходимость учета нелинейных членов в тейлоровском разложении функции $f(u)$, 3) Необходимость определения амплитуд не только сдвиговой, но и остальных мод, и поэтому построения детекторов для этих мод.

Благодаря этим обстоятельствам объем выкладок при увеличении требуемой точности быстро возрастает, а универсальность получающихся уравнений - столь же быстро падает.

2.5. Некоторые частные и предельные случаи.

а) Предел геометрической оптики.

Пренебрегая в (2.2.11) членами порядка ε , мы получаем уравнение Ховарда и Коппель:

$$\varphi_t = \omega ((\nabla \varphi)^2), \quad (2.5.1)$$

учитывающее только процесс дисперсии.

б) Диссипативные структуры

Частный случай $\omega=0$, когда процессы дисперсии отсутствуют, соответствует стационарным плоским диссипативным структурам. Хотя в принятой терминологии эти структуры не называются автоволнами, они могут удовлетворять всем использованным при выводе (2.3.9) предположениям.

Эволюционное уравнение принимает вид

$$\varphi_t = P (\nabla \varphi^2) + Q (\nabla \varphi^2) (\nabla \varphi \nabla) (\nabla \varphi)^2 \quad (2.5.2)$$

Такое уравнение было выписано в работе [Cross, Newell, 1984] в отношении гидродинамических диссипативных структур в тонком слое жидкости.

в) Длинные волны в автоколебательных средах.

В терминах разд. 2.1, свойство автоколебательности может быть выражено следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} \omega &\approx \omega_0 - \omega_1 (\nabla \varphi)^2, \\ P &\approx P_0, \\ Q &= O(1) \text{ при } (\nabla \varphi)^2 \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (2.5.3)$$

При малых $\nabla \varphi$ эволюционное уравнение приобретает вид

$$\varphi_t \approx -\omega_0 + \omega_1 (\nabla \varphi)^2 + P_0 \nabla^2 \varphi \quad (2.5.4)$$

Этот случай не соответствует сделанному при выводе (2.4.9) предположению $\nabla \nabla \varphi \ll \nabla \varphi \sim 1$. Однако все рассуждения остаются в силе и для $(\nabla \varphi)^2 \sim \nabla \nabla \varphi \ll 1$. Этот случай интересен тем, что дисперсионные и диффузионные члены приобретают одинаковый порядок, и возможно "полное обезразмеривание" без потери членов, обеспечивающих параболический характер уравнения, в отличие от случая общего положения.

Впервые уравнение (2.5.4) выписано, по-видимому, в [Yamada, Kuramoto, 1976] для частного случая $\lambda-\omega$ системы.

г) Один конкретный пример.

Рассмотрим простой частный случай, для которого нетрудно найти явный вид коэффициентов (2.3.9) – обобщенное

уравнение Гинзбурга-Ландау (1.1.10) при $\beta=0$. Семейство плоских волн (в правильной калибровке) имеет вид

$$U(\xi, \eta) = (1-\eta)^{1/2} e^{i\xi} \quad (2.5.5)$$

Линеаризованное уравнение и сопряженное к нему решаются аналитически. Нормированная "левая" сдвиговая мода имеет вид

$$W(\xi, \eta) = \frac{i(1-\eta)^{-1/2}}{2\pi} e^{i\xi} \quad (2.5.6)$$

Подразумевается, что

$$\langle w, v \rangle = \operatorname{Re}(w^* v). \quad (2.5.7)$$

Подставляя (2.5.6, 2.5.5) в (2.3.10, 2.3.9) получаем

$$\begin{aligned} P(\eta) &= 1, \\ Q(\eta) &= -1/(1-\eta), \\ R(\eta) &= (1-3\eta)/(1-\eta), \end{aligned} \quad (2.5.8)$$

и искомое эволюционное уравнение имеет вид

$$\varphi_t = -\alpha + \alpha (\nabla \varphi)^2 + \nabla^2 \varphi - \frac{(\nabla \varphi \nabla) (\nabla \varphi)^2}{1 - (\nabla \varphi)^2}. \quad (2.5.9)$$

Оно совпадает с уравнением, полученным Маломедом [Malomed 1983] другим путем, существенно опиравшимся на специфические свойства правой части (1.1.10).

2.6. Примеры решений уравнения ММАВ.

Здесь мы продемонстрируем особенности уравнения (2.4.9) по сравнению с приближением геометрической оптики.

а) Устойчивость плоской волны по волновому вектору.

Пусть

$$\begin{aligned}\varphi &= (\mathbf{k}_0, \mathbf{r}) - \omega(k_0^2)t + \varphi_1, & |\nabla\varphi_1| &\ll |k_0|; \\ \omega(\eta) &= \omega_0 + \omega_1(\eta - k_0^2) + O((\eta - k_0^2)^2), \\ P(\eta) &= P_0 + O(\eta - k_0^2), \\ Q(\eta) &= Q_0 + O(\eta - k_0^2) & \text{при } \eta \rightarrow k_0^2.\end{aligned}\quad (2.6.1)$$

Пусть для простоты все происходит на плоскости с координатами (x, y) , и пусть вектор \mathbf{k}_0 направлен вдоль оси x . Тогда в линейном по $\nabla\varphi_1$ приближении имеем вместо (2.3.9)

$$\varphi_{1,t} = -c_g \varphi_{1,xx} + R_0 \varphi_{1,xx} + P_0 \varphi_{1,yy} \quad (2.6.2)$$

где

$$c_g = 2\omega_1, \quad k_0 = d\omega(k^2)/dk \quad (2.6.3)$$

- групповая скорость,

$$R_0 = P_0 + 2k_0^2 Q_0 = R(k_0^2) \quad (2.6.4)$$

- коэффициент продольной диффузии, соответствующие данному волновому числу k_0 .

Пример равномерно ограниченного при всех x, y и при $t > 0$ решения (2.6.2) соответствующего определению ММАВ:

$$\varphi_1 = A \exp(-\varepsilon^2(R_0 x_x^2 + P_0 x_y^2)t) \cos(\varepsilon x_x(x - c_g t)) \cos(\varepsilon x_y y) \quad (2.6.5)$$

В движущейся вдоль x со скоростью c_g системе отсчета решение для φ_1 есть затухающая стоячая волна с периодами $2\pi/(\varepsilon x_x)$ и $2\pi/(\varepsilon x_y)$ и декрементом затухания $\varepsilon^2(R_0 x_x^2 + P_0 x_y^2)$.

Затухание плавных возмущений плоских волн на временах порядка ε^{-2} обязано своим происхождением учету диффузионных членов в эволюционном уравнении. Если эти члены отбросить

(или положить $P_0=Q_0=0$ в (2.6.2)), то затухание отсутствует, и Φ_1 - движущаяся со скоростью c_g вдоль оси x волна произвольной формы.

Естественно, что затухание при всех α_x, α_y происходит лишь в случае положительных коэффициентов диффузии - в противном случае возмущения могут нарастать, и при $P_0 < 0$ будет наблюдаться картина "самофокусировки", а при $Q_0 < 0$ - "самомодуляции". Разумеется, такая интерпретация возможна лишь при небольших по абсолютной величине P_0, R_0 .

Для уравнения (1.1.10) при $\beta=0$ условие $R_0 > 0$ нарушается как раз при $\eta=1/3$ (см. 2.5.11) - хорошо известно, что плоские волны в данной модели теряют устойчивость именно в этой точке, и что при немного больших волновых числах переход в другое (устойчивое) стационарное решение носит характер самомодуляции. Процессы типа самофокусировки при нарушении условия $P_0 > 0$ также известны - например, коротковолновая неустойчивость фронта горения при значительной диффузии ингибирующих продуктов реакции [Kigamoto 1980].

Замечание 1. Малые возмущения волнового вектора могут отвечать большим изменениям фазы и большим изменениям концентраций u , когда линейный анализ (1.1.1) неприменим.

б) Жесткость автоволн.

Другой пример - решение, не зависящее от t и y , равномерно ограниченное в полупространстве:

$$\Phi_1 = A_0 + A_1 \exp(c_g x / R_0) \quad (2.6.6)$$

Однако это решение удовлетворяет определению ММАВ только при

$$T_f = k_0 c_g / R_0 \ll 1. \quad (2.6.7)$$

Будем называть эту величину продольной жесткостью автоворны. Она характеризует отношение длины волны к характерной длине продольной диффузии. Решение (2.6.6) существует для автоворн малой продольной жесткости. Остальные примеры в этом пункте свободны от этого предположения.

Другой безразмерный параметр, - поперечная жесткость:

$$T_s = k_0 c_g / P_0 \quad (2.6.8)$$

Этот параметр появится ниже в асимптотике спиральной волны.

в) Мягкие ударные структуры.

Рассмотрим теперь аналогичную задачу для одномерного уравнения (2.3.11), более точно аппроксимировав $\omega(\eta)$:

$$\begin{aligned} k(x,t) &= k_0 x + \alpha(x,t) \\ \omega(k^2) &= \omega_0 + c_g \alpha + \omega_2 \alpha^2 \\ R(k^2) &= R_0 + \mathcal{O}(\alpha), \quad \alpha \ll k_0. \end{aligned} \quad (2.6.9)$$

Тогда одномерное уравнение ММАВ может быть записано следующим образом (вспомним, что φ_x - медленно меняющаяся функция).

$$\begin{aligned} \varphi_t &= -\omega_0 - c_g (\varphi_x - k_0) - \omega_2 (\varphi_x - k_0)^2 + R_0 \varphi_{xx} + \\ &+ \mathcal{O}(\alpha^3, \alpha \varepsilon, \varepsilon^2) \end{aligned} \quad (2.6.10)$$

Если отбросить члены, обозначенные как $\mathcal{O}()$ (их действительная малость может быть проверена для полученного решения), то (2.6.10) приводится к т.н. уравнению Бюргерса. Известной заменой переменных Коула-Хопфа

$$\begin{aligned}\Phi &= (-\omega_0 + c_g k_0 - \omega_2 k_0^2) t - \frac{R_0}{\omega_2} \ln \phi, \\ T &= t, \\ X &= x - (c_g - 2\omega_2 k_0) t\end{aligned}\tag{2.6.11}$$

оно приводится к уравнению линейной диффузии

$$\Phi_T = R_0 \Phi_{XX} \tag{2.6.12}$$

что позволяет легко находить его решения. Пример:

$$\Phi = -\omega_0 t - \frac{R_0}{\omega_2} \ln \left(\dots \right) \tag{2.6.13}$$

$$\begin{aligned}&\exp \left[\frac{\omega_2}{R_0} \left((c_g(k_1 - k_0) + \omega_2(k_1 - k_0)^2) t - k_1 x \right) \right] + \\ &+ \exp \left[\frac{\omega_2}{R_0} \left((c_g(k_2 - k_0) + \omega_2(k_2 - k_0)^2) t - k_2 x \right) \right]\end{aligned}$$

Здесь предполагается, что

$$|k_1 - k_0|, |k_2 - k_0| \sim \alpha \ll k_0. \tag{2.6.14}$$

Это решение есть не что иное, как "мягкая ударная структура" - волна перепада волнового числа между двумя асимптотическими значениями, существование которой было доказано в НК методами теории бифуркаций. Эта волна движется, в соответствии с правилом непрерывности фаз, со скоростью

$$\frac{\omega(k_1) - \omega(k_2)}{k_1 - k_2} = c_g + \omega_2(k_1 + k_2 - 2k_0) \tag{2.6.15}$$

и имеет ширину, пропорциональную $|k_1 - k_2|^{-1}$. Таким образом, параметр медленности волны есть $\varepsilon \alpha^2$, учтенные в (2.6.10) члены имеют порядок α^2 , а отброшенные - α^3 , что оправдывает

сделанное приближение.

Замечание 2. Структура волны перепада устойчива. Это легко видеть, рассмотрев эволюцию логарифмической фазы ϕ в силу (2.2.53).

Замечание 3. Можно показать, что в случае длинных волн в автоколебательной системе (2.5.4) неравенство (2.6.14) не обязательно, более того, мягкая ударная структура может быть даже между сталкивающимися автоволнами.

г) Асимптотика ревербератора вдали от ядра.

В качестве еще одного примера получим асимптотику поля стационарно вращающегося ревербератора в общей системе "реакция-диффузия" на большом удалении от центра.

Будем искать решение эволюционного уравнения ММАВ в виде, соответствующем предположению о стационарном вращении:

$$\begin{aligned}\varphi &= -\omega_0 t + \varphi_0(\vartheta, \rho) + \varphi_1(\rho), \\ \varphi_0(\vartheta, \rho) &= m\vartheta + \Phi(\rho),\end{aligned}\quad (2.6.15)$$

где ρ, ϑ – полярные координаты, ω_0 – частота ревербератора, m – число рукавов. Здесь φ_0 мы определим из приближения геометрической оптики, после чего определим φ_1 – относительно малую добавку. Приближение геометрической оптики дает уравнение для φ_0 :

$$(\nabla \varphi_0)^2 = k_0^2, \quad (2.6.16)$$

где k_0 – асимптотическое волновое число ревербератора, $\omega(k_0^2) = \omega_0$, и приводит к известному решению, соответствующему линиям равных фаз в виде эвольвент окружности:

$$\Phi(\rho) = \operatorname{arctg}(1/R) + R, \quad (2.6.17)$$

где

$$R = (k_0^2 \rho^2 - 1)^{1/2}. \quad (2.6.18)$$

Исходя из того, что вдали от ядра локальные волновые вектора по абсолютной величине близки к асимптотическому волновому числу, будем считать, что выполнено (2.6.1). Линеаризуя (2.3.9) по $\varphi_1 \equiv \partial\varphi_1 / \partial\rho$ и учитывая (2.6.17) получим

$$f(\rho) \varphi_1'' + g(\rho) \varphi_1' + h(\rho) = 0, \quad (2.6.19)$$

где при $\rho \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} f(\rho) &= P_0 + 2 k_0^2 Q_0 + O(\rho^{-2}), \\ g(\rho) &= - c_s + O(\rho^{-1}), \\ h(\rho) &= P_0 k_0 / \rho + O(\rho^{-2}). \end{aligned} \quad (2.6.20)$$

Решив это линейное уравнение, мы придем к следующему асимптотическому выражению:

$$\varphi(\rho, \theta) = -\omega_0 t + m\theta + k_0 \rho + \frac{1}{T_s} \ln \rho + \text{const} + O(\rho^{-1}). \quad (2.6.21)$$

Здесь T_s – поперечная жесткость (2.6.7).

Это выражение при больших ρ дает оценку для φ с точностью до поправки, которая много меньше 1 (произвольная постоянная, обозначенная *const*, соответствует произволу в выборе начального момента времени). Поэтому на основе этого выражения можно записать и асимптотику для решения и полного реакционно-диффузионного уравнения. Без учета процессов автоволновой диффузии (т.е. если положить $P_0=0$) ошибка в определении φ становится логарифмически большой при больших ρ , поэтому асимптотика для φ непригодна для построения

асимптотики для u - несмотря на то, что асимптотика для локального волнового вектора остается правильной (ошибка много меньше 1).

Это утверждение сделано в предположении, что в (1.1.1) не содержится малых параметров, и поэтому все безразмерные комбинации коэффициентов в (2.3.9) порядка единицы.

Если же T_g велико, то соответствующая поправка лишается смысла. Рассмотрим, например, ревербератор в среде Белоусова-Жаботинского. Для этой среды жесткость легко выражается через наблюдаемые в эксперименте параметры: групповая скорость близка к фазовой, а все коэффициенты диффузии близки между собой и, следовательно, близки к P_0 (см. замечание к формулам 2.3.10). Для скорости порядка 5 мм/мин, длины волны порядка 5 мм и коэффициентов диффузии порядка 1.6×10^{-5} см²/сек имеем $T_g \approx 300$, т.е. автоволны "чрезвычайно жесткие". Следовательно, чтобы наблюдать отличие формы спиральной волны при больших радиусах от архimedовой, нужно иметь чудовищную спиральную волну с числом оборотов порядка $e^{300 \approx 10^{133}}$.

2.7. Диссипативные свойства одномерного уравнения ММАВ.

Диффузионные члены в уравнении ММАВ приводят к тому, что в эволюции автоволновой фазы появляются черты необратимости, или диссипация. Примеры решений, демонстрирующие такую необратимость, мы уже видели в разд. 2.6. Здесь мы укажем два свойства одномерного уравнения ММАВ, выполняющихся для произвольных (необязательно имеющих почти постоянный волновой вектор) решений. Оба свойства выражаются в стремлении к установлению постоянного волнового числа.

а) Функционал Ляпунова.

Рассмотрим функционал

$$K(t) = \frac{1}{2} \int_{x_1}^{x_2} \varphi_x^2(x, t) dx \quad (2.8.1)$$

Производная этого функционала в силу (2.3.9) есть

$$K_t = [\Omega(\varphi_x) + \varphi_x (R(\varphi_x^2) \varphi_{xx} - \omega(\varphi_x^2))] \int_{x_1}^{x_2} - \\ - \int_{x_1}^{x_2} R(\varphi_x^2) \varphi_{xx}^2 dz \quad (2.8.2)$$

где

$$\Omega(k) = \int \omega(k^2) dk \quad (2.8.3)$$

- первообразная от дисперсионной кривой. Видно, что эволюция этого функционала в силу внутренних причин (вторая строчка) сводится к его убыванию, при условии что $R > 0$ и если только волновое число не постоянно. Влияние внешних причин (первая строчка) равно нулю, например, в следующих случаях:

- 1) На границах заданы условия периодичности (например, задача поставлена на окружности).
- 2) Задача поставлена на прямой $(-\infty, \infty)$, причем асимптотические значения волновых чисел равны: $\varphi_x \rightarrow k_0$, $\varphi_{xx} \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \pm\infty$.
- 3) На границах задано условие непроницаемости (эта постановка имеет смысл, например, для автоколебательных систем).

В этих случаях происходит убывание функционала K и эволюция к постоянному волновому числу: $2\pi N$ для некоторого це-

лого N , зависящего от начальных условий в случае 1, k_0 в случае 2 и 0 (вымирание автоловы и переход к однородным автоколебаниям) в случае 3.

б) Принцип максимума.

Пусть в момент t_0 во внутренней точке среды x_0 волновое число имеет локальный максимум:

$$k(x_0, t_0) = 0, \quad k_{xx}(x_0, t_0) < 0. \quad (2.8.4)$$

Тогда в этой точке волновое число со временем в силу уравнения эволюции уменьшается:

$$k_t = \frac{d\omega}{dk} k_x + \frac{dP}{dk} k_x^2 + R k_{xx} = R k_{xx} < 0, \quad (2.8.5)$$

если только $R(k(x_0, t_0))$ положительно.

2.8. Связь с методом Уизема.

Покажем, что использованный выше метод применим и для классических (консервативных) волн, т.е. действительно является обобщением приближения геометрической оптики и метода Уизема.

В качестве примера рассмотрим нелинейное уравнение Клейна-Гордона:

$$u_{tt} - u_{xx} + f'(u) = 0 \quad (2.8.1)$$

для скалярного поля u . Основные идеи вывода совпадают с использованными в п.2.4, здесь мы будем излагать более кратко. Периодические волны образуют двухпараметрическое семейство с параметрами k , a , определяемое соотношениями:

$$u = U(\xi, a), \quad U(\xi + 2\pi, a) \equiv U(\xi, a) \quad (2.8.2)$$

$$\xi = kx - \omega t, \quad (2.8.3)$$

$$E(a) U_{\xi\xi} + f'(U) = 0, \quad (2.8.4)$$

$$\omega^2 = E(a) + k^2. \quad (2.8.5)$$

Здесь k – волновое число, ω – частота, a – некоторый амплитудный параметр. Вид функции $E(a)$ зависит от определения параметра a ; для линейных волн $E(a)=\text{const}$.

Ищем решения типа медленно меняющихся волн в виде

$$u = U(\varphi(x,t,\varepsilon), a(x,t,\varepsilon)) + v(x,t,\varepsilon), \quad (2.8.6)$$

$$\varphi(x,t,\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} \Phi(\varepsilon x, \varepsilon t), \quad (2.8.7)$$

$$a(x,t,\varepsilon) = A(\varepsilon x, \varepsilon t), \quad (2.8.8)$$

$$v = O(\varepsilon), \quad \Phi, A = O(1). \quad (2.8.9)$$

В линейном приближении по v получаем уравнение

$$\mathcal{L} v + h = 0, \quad (2.8.10)$$

где

$$\mathcal{L} v = \omega^2 v_{tt} - k^2 v_{xx} + f''(U(\varphi, a)) v \quad (2.8.11)$$

и

$$h = (\varphi_t^2 - \omega^2(a, \varphi_x)) U_{\xi\xi} + (\varphi_{tt} - \varphi_{xx}) U_\xi + 2(\varphi_t a_t - \varphi_x a_x). \quad (2.8.12)$$

Представление (2.8.6–2.8.9) неоднозначно: замена вида

$$\begin{aligned} \varphi &\rightarrow \varphi + \delta\varphi \\ a &\rightarrow a + \delta a \end{aligned} \quad (2.8.13)$$

$$v \rightarrow v - U_a \delta a - U_\xi \delta \xi$$

(в линейном приближении по $\delta\varphi$, δa) оставляет функцию u без изменения. Поэтому недоопределенность уравнения (2.2.10) устраняется двумя условиями на равенство нулю δa , $\delta \xi$.

Легко проверить справедливость следующих тождеств:

$$\oint U_\xi U_a d\xi = \oint U_\xi U_{\xi\xi} d\xi = \oint U_a U_{\xi a} d\xi = 0, \quad (2.8.14)$$

$$\oint U_{\xi\xi} U_a d\xi = - \oint U_\xi U_{\xi a} d\xi = \frac{dg}{da} \quad (2.8.15)$$

где

$$g(a) = \oint U_\xi^2 d\xi \quad (2.8.16)$$

Отсюда видно, что для построения детектирующих операторов можно использовать ядра: для $\delta\varphi$ — $\partial U / \partial \xi$; для δa — $\partial^2 U / \partial \xi^2$. Другими словами, условия однозначности представления суть:

$$\langle U_\xi, v \rangle = \langle U_{\xi\xi}, v \rangle = 0. \quad (2.8.17)$$

Здесь угловыми скобками обозначен детектирующий оператор типа определенного формулой (2.4.3). Далее, из

$$\langle U_\xi, Lv + h \rangle = \langle U_{\xi\xi}, h \rangle = 0 \quad (2.8.18)$$

получаем эволюционное уравнение

$$g(a) (\varphi_{tt} - \varphi_{xx}) + \frac{dg(a)}{da} (\varphi_t a_t - \varphi_x a_x) = 0, \quad (2.8.19)$$

а из

$$\langle U_a, Lv + h \rangle = \langle U_{\xi\xi}, v \rangle + \langle U_a, h \rangle = \langle U_a, h \rangle = 0 \quad (2.8.20)$$

второе эволюционное уравнение:

$$\varphi_t^2 = \omega^2(\varphi_x, a) = E(a) + \varphi_x^2 \quad (2.8.21)$$

Условимся, что волна распространяется вправо, функция $\omega(k, a)$ положительна, и введем локальные волновое число $k = \partial\varphi/\partial x$. Тогда второе уравнение можно переписать в виде

$$\varphi_t = -\omega(\varphi_x, a) \quad (2.8.22)$$

или

$$k_t + \omega_k k_x + \omega_a a_x = 0 \quad (2.8.23)$$

Используя (2.8.22) выразим $\partial\varphi/\partial t$ и $\partial^2\varphi/\partial t^2$ в (2.8.19) через пространственные производные, получим для амплитуды:

$$(wg_a + g\omega_a)a_t + (kg_a - \omega_k\omega_a g)a_x + g(1 - \omega_k^2)k_x = 0 \quad (2.8.24)$$

Уравнения (2.8.23) и (2.8.24) дают исковую систему эволюционных уравнений. Легко проверить, что в линейном случае данная система дает хорошо известные уравнения геометрической оптики: уравнение эйконала и уравнение переноса для амплитуды (для этого необходимо учесть явный вид дисперсионного соотношения (2.8.5)). В нелинейном случае оказывается удобным выбрать параметр амплитуды $a=g$, хотя, как уже было указано, выбор амплитудного параметра может быть произвольным. Можно показать, что полученная система уравнений эквивалентна системе, получающейся традиционным методом Уизема. Соответствующие выкладки не сложны, но громоздки, и для экономии места не приводятся.

Итак, для вывода уравнений эволюции модулированных волн традиционные предположения метода Уизема – о существовании определенного количества точных законов сохранения или представимости микроскопического уравнения в лагранжевой форме –

не являются необходимыми; и вполне достаточно одного лишь существования l -параметрического семейства решений. При этом l эволюционных уравнений появляются автоматически.

Здесь уместно процитировать монографию П.Бхатнагара [Bhatnagar 1979], в русском переводе стр. 117: "Во всех задачах, рассмотренных до сих пор, число независимых осредненных уравнений сохранения в точности равно числу неизвестных параметров. Однако до сих пор нет общего доказательства этого факта, и секрет доказательства предположительно заключается в трансформационных свойствах основной системы уравнений".

Можно думать, что мы получили один из возможных вариантов ответа на этот вопрос: число уравнений сохранения может не совпадать с числом "параметров порядка", однако это и не требуется. Так, в автоволновой реакционно-диффузионной системе точных законов сохранения, по-видимому, нет.

В заключение раздела обратим внимание, что система уравнений эволюции модулированных волн в среде Клейна-Гордона является гиперболической и эффекты типа диффузии отсутствуют, несмотря на то, что при выводе мы учи-тывали как члены порядка 1, так и члены порядка ε . Это свойство обусловлено специфическим вырождением, присущим этой задаче (см. тождества (2.8.14), (2.8.15)). Кажется правдоподобным, что это вырождение как раз и связано с наличием закона сохранения.

Глава 3. ДРЕЙФ РЕВЕРБЕРАТОРА В РЕЗУЛЬТАТЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ С ГРАНИЦАМИ.

3.1. Предварительные замечания.

а) Физическая постановка задачи.

В данной главе будет предложен вариант сингулярной теории возмущений, пригодной для исследования дрейфа ревербератора вследствие взаимодействия с границей. Результатом этой теории является описание ревербератора как "точечной" частицы, взаимодействующей с окружающей средой, а эволюция окружающей среды описывается уравнением ММAB. При этом положение ревербератора является "параметром порядка", т.к. при малых скоростях дрейфа состояние окружающей среды успевает подстраиваться к каждому новому положению до того, как оно существенно изменяется (адиабатическое приближение).

Представляется правдоподобным, что взаимодействие с ударной структурой и, соответственно, взаимодействие ревербераторов может быть рассмотрено аналогичным образом. Однако задача о взаимодействии с неподвижной границей является более простой и поэтому первоочередной.

б) Модель.

Для построения общей теории полезно исследование простейших случаев, допускающих аналитические подходы. В данной главе исследуется именно такой простейший случай. Мы проведем исследование на примере обобщенного уравнения Гинзбурга-Ландау (1.1.10) с малым коэффициентом нелинейной дисперсии $\alpha \ll 1$ (для определенности будем считать $\alpha > 0$) и с нулевым коэффициентом нелинейной $\beta = 0$:

$$\partial u / \partial t = (1-i\Omega) u - (1-ia) u|u|^2 + \Delta u; \quad (3.1.1)$$

$$\Omega > 0, a \ll 1, \Omega \approx 1$$

При помощи замены $\tilde{u} = u \cdot \exp(-i\Omega t)$ всегда можно добиться $\Omega = 0$; однако (3.1.1) обладает тем приятным свойством, что совпадают направления групповой и фазовой скоростей.

Эта модель обладает рядом особенностей, облегчающих анализ и позволяющих довести его "до цифры" ценой численного решения одной одномерной краевой задачи без параметров:

1. Для этой модели известны коэффициенты уравнения ММАВ (см. (2.2.40), (2.2.41)).
2. При $a \ll 1$ реализуется "мягкий" случай, взаимодействие с границей может рассматриваться в рамках теории ММАВ.
3. При $a \ll 1$ автоволновая диффузия изотропна, и уравнение ММАВ приводится к линейному.
4. Специфический вид нелинейности позволяет предположить, что в каждой точке среды имеют место гармонические колебания, и задача допускает разделение переменных.
5. При $a \ll 1$ существует асимптотическое решение задачи о свободном ревербераторе [Hagan 1982], разумность которого подтверждена численным экспериментом [Kuramoto, Koga 1981], и которое активно использует особенности 1-4.

Хагановский ревербератор имеет вид:

$$u_0 = e^{im\theta - i\omega_0 t} U(\rho) \quad (3.1.2)$$

Здесь ρ, θ – полярные координаты (центр вращения находится в начале координат), $U \in \mathbb{C}$, $m \neq 0$ – число рукавов спирали ("топологический заряд"), пусть $m > 0$. При этом

$$\frac{d \arg(U)}{d \rho} \rightarrow k_0, \quad \rho \rightarrow \infty; \quad \omega_0 = \Omega - a + ak_0^2 \quad (3.1.3)$$

т.е. вихрь является источником (как уже говорилось, здесь направления групповой и фазовой скорости совпадают). Асимптотическое выражение для собственного волнового числа, полученное Хаганом, имеет вид

$$k_0 \approx -\frac{2}{a} \exp\left(-\frac{\pi}{2ma} + H_m'\right), \quad a \rightarrow 0. \quad (3.1.4)$$

Здесь H_m' — константы, определенные численно. Это решение мы будем называть свободным ревербератором.

Настоящая глава могла бы быть непосредственным продолжением работы Хагана; и поэтому изложение оказалось удобным строить так, что соответствующие результаты Хагана, касающиеся свободного ревербератора, окажутся получены "попутно" наряду с новыми.

в) Математическая постановка и метод решения.

Итак, пусть задана автоволновая среда, описываемая уравнением (3.1.1) в ограниченной (для простоты — конечной) области, с условиями непроницаемости на границах:

$$(nv) u|_{\Gamma} = 0, \quad (3.1.5)$$

где n — нормаль к границе Γ . Будем предполагать, что расстояния от границ до ядра ревербератора достаточно велики, по сравнению со всеми характерными размерами, свойственными свободному ревербератору.

Общая схема решения такова. Прежде всего, применяется адиабатическое приближение, позволяющее в движущейся вместе

с ревербератором системе отсчета перейти к некоторой стационарной задаче, в которой сдвиг частоты и скорость дрейфа выступают как собственные значения.

Решение же стационарной задачи осуществляется достаточно стандартным методом сшивания асимптотических представлений в разных областях. В случае произвольной автоволновой системы эти области могут быть трех типов: а) область вблизи начала координат, где решение близко к свободному ревербератору, б) область вдали от начала координат и вдали от границ, где решение близко к медленно меняющимся волнам, в) область вблизи границ, где решение представляет из себя т.н. ударную структуру, описанную Ховардом и Копель [Howard, Kopell 1977]. Сшивки производятся в областях перекрывания областей (а) с (б) и (б) с (в). Условия осуществимости таких сшивок и дают искомые скорость дрейфа и сдвиг частоты как функцию положения центра ревербератора относительно границ.

В выбранной же модели благодаря указанному выше свойству 2 область вблизи границ может быть рассмотрена в рамках теории ММАВ, и вместо двух сшивок нужно производить только одну.

3.2. Адиабатическое приближение.

Для описания дрейфа рассмотрим систему отсчета, движущуюся по траектории $r=r^*(t)$ относительно лабораторной. В этой системе отсчета вместо (3.1.1), (3.2.1) имеем

$$\frac{\partial u}{\partial t} = (1-i\Omega)u - (1-ia) u|u|^2 + \nabla^2 u + \left(\frac{dr^*}{dt} \cdot \nabla \right) u, \quad (3.2.1)$$

$$(n\nabla) u(r) \Big|_{(r+r^*(t)) \in \Gamma} = 0, \quad (3.2.2)$$

или

$$(n'\nabla) u(r) \Big|_{r \in \Gamma'(t)} = 0, \quad (3.2.2')$$

- краевую задачу с движущимися границами.

Пусть выбранная система отсчета движется вместе с ревербератором, то есть решение задачи (3.2.1), (3.2.2) приблизительно периодично и в некоторой окрестности начала координат все время близко к свободному ревербератору. Вблизи границ такой близости быть не может: свободный ревербератор не может удовлетворять условию (3.2.2), коль скоро Γ - замкнутая кривая, окружающая ядро.

Из численных экспериментов [Ермакова, Перцов 1986] видно, что скорость дрейфа быстро убывает с увеличением характерных расстояний L между ревербератором и границей. Оценка, которая будет сделана в данной работе, согласуется с этим: скорость убывает экспоненциально.

С другой стороны, с увеличением размеров области время установления устойчивого стационарного состояния автоволнового поля (соответствующего периодическому изменению концентраций u) будет расти не быстрее чем по степенному закону. Именно, в гл. 2 мы видели, что такое установление определяется двумя процессами: дисперсией на временах порядка $L/a\kappa$, т.к. групповая скорость составляет $2a\kappa$; и автоволновой диффузией на временах порядка L^2 , т.к. коэффициенты автоволновой диффузии здесь близки к 1.

Поэтому при достаточно больших расстояниях между границей и ревербератором граница Γ' в (3.2.2') не успевает

существенно сдвинуться за время установления стационарного режима, соответствующего текущему положению границы Γ' .

Для этого стационарного режима имеем задачу

$$(1-i\Omega) u - (1-i\alpha) u|u|^2 + \nabla^2 u + (c\nabla)u = -i\omega u \quad (3.2.3)$$

$$(n \nabla) u(r) \Big|_{\Gamma'} = 0, \quad (3.2.4)$$

или в тригонометрической форме:

$$\begin{cases} (\nabla^2 a + (1 - a^2 - (\nabla \varphi)^2) a = - (c \nabla) a \\ (\alpha \nabla^2 \varphi + 2 (\nabla a \nabla \varphi) = a (\Omega - \omega - \alpha a^2 - (c \nabla) \varphi), \end{cases} \quad (3.2.3')$$

$$(n \nabla) a \Big|_{\Gamma'} = 0, \quad (n \nabla) \varphi \Big|_{\Gamma'} = 0 \quad (3.2.4')$$

Вектор скорости $c=dr^*/dt$ и частота ω оказываются собственными значениями: при заданных a и Γ' они однозначно определены. Согласно [Hagan, 1982], [Kuramoto, Koga 1981] свободный ревербератор устойчив при малых α при $m=1$; будем предполагать, что стационарный режим, определяемый задачей на собственные значения (3.2.3), (3.2.4) также устойчив. Наоборот, стационарные ревербераторы при $m>1$ неустойчивы, так что достаточно рассмотреть случай $m=1$; однако обобщение для $m>1$ не вызывает трудностей. Далее мы ограничимся лишь анализом задачи (3.2.3), (3.2.4).

Такое приближение в известной степени аналогично использованию уравнений электростатики в задаче о движении системы электрических зарядов, когда скорости зарядов много меньше скорости света. В соответствии с этой аналогией, условие применимости приближения сводится к

$$|c| \ll a k_0, \quad (3.2.5)$$

так как волновому числу k в данной модели соответствует скорость передачи информации $2ak$. Вспомнив, однако, что в случае автоволны установление происходит не только за счет процессов переноса, но и за счет диффузии, получим еще одно условие:

$$|c| \ll 1/L, \quad (3.2.6)$$

где L – типичный размер среды (в данном пределе автоволновая диффузия изотропна, и коэффициент ее равен 1). Ниже мы будем работать в пределе $L \gg (ak)^{-1}$, и условие (3.2.6) более сильное.

3.3. Внутренняя область.

В сделанных предположениях естественным способом решения (3.2.3) при небольших ρ является теория возмущений, со свободным ревербератором в качестве нулевого приближения и с малыми параметрами c и $\omega - \omega_0$. В первом порядке для поправок получается линейное неоднородное уравнение, которое в силу вида нелинейности в (3.1.1) расщепляется в последовательность систем обыкновенных уравнений 4-го порядка. Исследование их асимптотик при малых и при больших ρ позволяет убедиться в однозначности c и ω , и экспоненциальном характере их убывания с удалением от границ. Однако эти системы все еще зависят от a сложным образом.

Поскольку предполагается $a \ll 1$, то естественно исследовать зависимость от этого параметра асимптотически. Обратим внимание, что свободный ревербератор (3.1.2-3.1.4) близок к решению (3.1.1) при $a=0$ – бездисперсионному вихрю, исследованному в [Greenberg 1978], и при небольших ρ получается из

последнего теорией возмущений по а [Hagan 1982].

Итак, при небольших ρ будем искать решение (3.2.3') в виде $a=a_0+a_1$, $\varphi=\varphi_0+\varphi_1$, $a_1 \ll a_0$, $\varphi_1 \ll \varphi_0$, рассматривая a_1 , φ_1 и $(\omega-\omega_0)$ как малые параметры, и ограничиваясь линейным приближением по каждому из них. Невозмущенное решение описывается [Hagan 1982] функциями $\varphi_0=m\theta$, $a_0=a_0(\rho)=P(\rho, m)$, где $P(\rho, m)$ - решение уравнения Гринберга [Greenberg 1980]:

$$\frac{d^2 a_0}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{da_0}{d\rho} + a_0 \left(1 - a_0^2 - \frac{m^2}{\rho^2} \right) = 0 \quad (3.3.1)$$

причем

$$P(\rho, m) \approx 1 - \frac{m^2}{2\rho^2}, \quad \rho \rightarrow \infty; \quad P(\rho, m) \approx \varepsilon(m) \rho^m, \quad \rho \rightarrow 0 \quad (3.3.2)$$

Имеем для a_1 , φ_1 линейное неоднородное уравнение. Будем искать его решения в виде суммы угловых Фурье-компонент:

$$a_1 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n(\rho) e^{in\theta}, \quad \varphi_1 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \Phi_n(\rho) e^{in\theta}, \quad (3.3.3)$$

с очевидными условиями симметрии, необходимыми для вещественности a_1 , φ_1 . В результате получается попарно сцепленные системы уравнений вида

$$\begin{aligned} \frac{d^2 A_n}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dA_n}{d\rho} + (1 - 3 P^2 - \frac{m^2 + n^2}{\rho^2}) A_n &= -\frac{2imn}{\rho^2} P \Phi_n \\ = -\frac{1}{2} c \frac{dP}{d\rho} (e^{-i\theta} \delta_{n,1} + e^{i\theta} \delta_{n,-1}), & \end{aligned} \quad (3.3.4)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \Phi_n}{d\rho^2} + \left(\frac{1}{\rho} + \frac{2}{P} \frac{dP}{d\rho} \right) \frac{d\Phi_n}{d\rho} - \frac{n^2}{\rho^2} \Phi_n + \frac{2mn}{\rho^2 P} A_n &= \\ & \end{aligned} \quad (3.3.5)$$

$$= \Theta(\Omega - \omega - \alpha P^2) \delta_{n,0} \oplus c \frac{im}{2\rho} (e^{-i\theta} \delta_{n,1} \oplus e^{i\theta} \delta_{n,-1})$$

Здесь $P=P(\rho, m)$, $c=(c \cdot \cos\theta, c \cdot \sin\theta)$, $\delta_{t,j}$ — символ Кронекера.

Следуя работе Хагана, учтем, что $\omega \approx \Omega - \alpha$ с точностью до экспоненциально малой поправки, и получим при $n=0$ частное решение:

$$A_0 = 0, \quad \Phi_0 \approx \alpha \int_0^\rho \frac{d\sigma}{\sigma P^2(\sigma)} \int_0^\sigma \tau P^2(\tau) (1 - P^2(\tau)) d\tau \quad (3.3.6)$$

С точностью до произвольной константы в Φ_0 , соответствующей сдвигу начала отсчета времени, все остальные ограниченные в нуле решения экспоненциально нарастают при больших ρ . Асимптотика (3.3.6) при больших ρ имеет вид

$$\Phi_0 \approx \alpha m^2 \ln(\rho) \left(\frac{1}{2} \ln(\rho) + H_m \right), \quad \rho \gg 1 \quad (3.3.7)$$

Константы H_m можно найти численно. Согласно Хагану $H_1 \approx -0.098, H_2 \approx -0.998, H_3 \approx -1.3, \dots$

Из (3.3.7) следует, что Φ_0 мало в области

$$\rho \ll \exp((2/\alpha m^2)^{1/2}) \quad (3.3.9)$$

Это, как будет видно ниже, и есть область применимости рассматриваемого внутреннего разложения.

После замены переменных

$$A_1 = -\frac{c}{2} e^{-i\theta} y, \quad P\Phi_1 = -i \frac{c}{2} e^{-i\theta} z \quad (3.3.10)$$

вместо системы (3.3.4), (3.3.5) при $n=1$ получим систему относительно y, z с вещественными коэффициентами. Одно из решений соответствующей однородной системы, отвечающее малому сдвигу начала координат, известно точно:

$$y = \frac{dp}{d\rho}, \quad z = \frac{m_p}{\rho} \quad (3.3.11)$$

Различные решения, отличающиеся только на это тривиальное, физически тождественны. Условимся считать, что тривиальное решение (3.3.11) не дает вклада в интересующее нас; тогда многообразие решений только трехмерно.

Проанализируем асимптотики полученной системы при малых и при больших ρ . Соответствующая однородная система имеет два линейно независимых решения, ограниченных при малых ρ , одно из которых есть тривиальное решение (3.3.11).

При больших ρ однородная система имеет одно линейно независимое решение, растущее экспоненциально с показателем $\sqrt{2}$, а три остальных растут степенным образом или убывают. В обоих пределах имеются ограниченные частные решения неоднородной системы.

Следовательно, если хотя бы одно решение однородной системы, ограниченное при $\rho \rightarrow 0$, экспоненциально растет при больших ρ (это условие легко проверяется численно), то существует ограниченное в нуле решение, в котором экспоненциально растущая при больших ρ компонента отсутствует. Это решение единствено с точностью до тривиального, и имеет асимптотику

$$y \approx \frac{m^2}{\rho} \left(\frac{1}{2} \ln(\rho) + B_m \right), \quad (3.3.12)$$

$$z \approx \rho \left(\frac{1}{2} \ln(\rho) + B_m \right), \quad \rho \gg 1$$

Константы $B_m \in \mathbb{R}$ для первых m были оценены численно:

$$B_1 \approx -0.31, \quad B_2 \approx -0.78, \quad B_3 \approx -1.01 \quad (3.3.13)$$

Именно это решение, как мы увидим, может быть сшито с внешним представлением.

Аналогичное исследование можно провести и для $n > 1$. В отличие от случая $n=0,1$ здесь мы имеем однородную систему. Как и в предыдущих случаях, не слишком быстро растущие решения образуют при каждом $n > 1$ однопараметрическое семейство

$$A_n \approx C_n m n \rho^{n-2}, \quad \Phi_n \approx C_n t \rho^n, \quad \rho \gg 1, \quad n \geq 2 \quad (3.3.14)$$

с параметром C_n .

В отличие от случаев $n=0,1$ это семейство содержит тождественный ноль, а разные его представители физически различные. Итак, при

$$1 \ll \rho \ll \exp((2/\alpha m^2)^{1/2}) \quad (3.3.15)$$

мы получили решение системы (3.2.3') в виде

$$a(\rho, \theta) \approx P(\rho, m) - C \frac{m^2}{\rho} \left(\frac{1}{2} \ln(\rho) + B_m \right) \cos(\theta - \theta_0) + \quad (3.3.16)$$

$$+ \sum_{n=2}^{\infty} 2m n \rho^{n-2} \operatorname{Re} (c_n e^{in\theta});$$

$$\varphi(\rho, \theta) \approx m\theta + \alpha m^2 \ln(\rho) \left(\frac{1}{2} \ln(\rho) + H_m \right) + \\ (3.3.17)$$

$$+ \frac{1}{2} \ln(\rho) + B_m \sin(\theta - \theta_0) - \sum_{n=2}^{\infty} 2\rho^n \operatorname{Im} (c_n e^{in\theta}),$$

Отметим, что при условии (10) и при достаточно малых c_n поправки a_1 , Φ_1 малы в области (3.3.15).

3.4. Внешняя область.

Непосредственной подстановкой можно проверить, что правые части (3.3.16), (3.3.17) с той точностью, с которой справедливы эти соотношения, удовлетворяют в области (3.3.15) предположению локальной близости к плоским волнам

$$a^2 \approx 1 - (\nabla \varphi)^2 \quad (3.4.1)$$

Это соотношение является точным для плоских волн, и для данной конкретной модели служит наглядным критерием применимости приближения ММАВ; его подстановка во второе уравнение системы (3.2.3') дает замкнутое уравнение для фазы

$$\nabla^2 \varphi - \frac{(\nabla \varphi \nabla) (\nabla \varphi)^2}{1 - (\nabla \varphi)^2} - \alpha (\nabla \varphi)^2 + (c \nabla) \varphi = \Omega \alpha - \omega \quad (3.4.2)$$

которое может быть также получено непосредственно из уравнения ММАВ (2.2.41) для этой модели переходом в движущуюся

систему отсчета. Замена Коула-Холфа

$$\varphi = -1/\alpha \ln(\psi) \quad (3.4.3)$$

дает вместо (3.4.2)

$$\nabla^2 \psi + (\mathbf{c}\nabla) \psi - \alpha^2 k^2 \psi = 0. \quad (3.4.5)$$

Здесь k – асимптотическое число, соответствующее данной частоте взаимодействующего ревербератора

$$\omega = \Omega - i\alpha + \alpha k^2 \quad (3.4.6)$$

Нас интересуют не совсем обычные (неограниченно растущие) решения этого уравнения. Например, решению уравнения (3.1.1) в виде плоской волны с волновым числом k отвечает функция ψ вида $\psi = \exp(\alpha^2 k^2 t - \alpha k x)$. При наличии замкнутого контура, при обходе которого фаза ψ меняется на $2\pi m$, $m \neq 0$, экспоненциальная фаза ψ также будет неоднозначной функцией: при таком обходе она увеличится (уменьшится) в $\exp(2\pi m a)$ раз.

Длинные волны в автоколебательной среде являются мягкими, и взаимодействие волн с непроницаемой границей можно описывать в рамках (3.4.5).

С учетом неоднозначности ψ общее решение (3.4.5) есть

$$\psi = e^{-(cr)/2 - i\alpha t} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{int} (G_n K_{n+iam}(\alpha zr) + F_n I_{n+iam}(\alpha zr)) \quad (3.4.7)$$

с произвольными F_n , G_n . Здесь $\alpha^2 = k^2 - c^2/4a$; K_{n+iam} , I_{n+iam} – линейно независимые решения модифицированного уравнения Бесселя с комплексным индексом $n+iam$, причем

$$K_\mu(z) \approx \frac{1}{\sqrt{z}} e^{-z}, \quad I_\mu(z) \approx \frac{1}{\sqrt{z}} e^z, \quad z \rightarrow \infty; \quad I_\mu(z) = O(1), \quad z \rightarrow 0;$$

$$\begin{matrix} \mathcal{K} & \equiv & \mathcal{K} \\ \mu & -\mu & \mu \end{matrix}, \quad \begin{matrix} \mathcal{I} & \equiv & \mathcal{I} \\ \mu & -\mu & \mu \end{matrix}, \quad \begin{matrix} (\mathcal{K}_*)^* & \equiv & \mathcal{K} \\ \mu^* & -\mu^* & \mu \end{matrix}, \quad \begin{matrix} (\mathcal{I}_*)^* & \equiv & \mathcal{I} \\ \mu^* & -\mu^* & \mu \end{matrix} \quad (3.4.8)$$

(обратим внимание, что такое определение отличается от традиционного определения модифицированных функций Бесселя!). Вещественность ряда (3.4.7) требует

$$G_{-n} \equiv (G_n)^*; \quad F_{-n} \equiv (F_n)^* \quad (3.4.9)$$

Для свободного ревербератора все F_n, G_n равны нулю, кроме G_0 , который можно положить равным единице. Чтобы при небольших с движущийся ревербератор слабо отличался от свободного, необходимо выполнение неравенств

$$G_n \ll 1, \quad n \neq 0. \quad (3.4.10)$$

В остальном G_n, F_n выбираются исходя из граничных условий

$$(n \nabla) \Phi \Big|_{\Gamma'} = 0 \quad (3.4.11)$$

Проще всего это сделать, если граница Γ' целиком видна из центра вращения ревербератора, т.е. может быть задана уравнением $\rho=L(\theta)$, причем L удовлетворяет неравенствам

$$akL \gg 1, \quad \left(\frac{1}{L} \frac{dL}{d\theta} \ll akL \right) \quad (3.4.12)$$

(отметим, что эти предположения носят чисто технический характер и не принципиальны для метода).

Тогда, ограничиваясь только старшими членами, получим

$$F_n = \frac{1}{2\pi} \oint e^{-in\theta} e^{-2akL(\theta)} d\theta \quad (3.4.13)$$

Условия (3.4.9) выполняются автоматически. Из (3.4.13)

видно, что если $\exp(-2\alpha kL)$ достаточно гладкая функция, то F_n малы при больших n и функция Φ не имеет больших градиентов при $\rho \gg 1$, что подтверждает применимость приближения ММАВ.

Ниже мы увидим, что F_n играют роль "сил", действующих на ревербератор и приводящих к его дрейфу. То, что эти "силы" определяются в основном уже в нулевом порядке по ϵ (отличие α от k оказывается несущественным), делает предположение об адиабатичности поля ревербератора самосогласованным.

3.5. Сшивка в промежуточной области. Уравнения движения ревербератора.

Итак, в области (3.3.15) мы имеем одновременно два представления для решения задачи (3.2.3), (3.2.4): в виде (3.3.17) (внутреннее представление) и (3.4.7) (внешнее представление). При этом (3.3.16) автоматически выполняется в силу (3.2.17) и того факта, что решение в этой области является ММАВ.

Коэффициенты внутреннего представления зависят от скорости дрейфа и сдвига частоты, а внешнего - от положения границ. В нашем подходе, когда промежуточная область выбрана при не слишком больших радиусах (до выхода линий равных фаз на спиральную асимптотику) скорость дрейфа присутствует и во внешнем представлении; эта зависимость окажется существенной для вычисления скорости дрейфа во втором порядке по α .

Для сшивки нам потребуется асимптотика внешнего представления (3.4.7) в промежуточной области (3.3.15). Для этого нам понадобятся асимптотики для I , K в (3.4.7) при малых $\alpha k r$ и αm , которые с учетом (3.4.8) можно получить из табличных сведений о цилиндрических функциях:

$$\mathcal{K}_{iq}(z) = -\frac{\sqrt{2/\pi}}{q} \sin \{ q [\ln(z/2) + \gamma] \} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

$$I_{iq}(z) = \sqrt{2/\pi} \cos \{ q [\ln(z/2) + \gamma] \} \quad (3.5.1)$$

$$I_{1+iq}(z) = \sqrt{\pi/2} z \exp \{ iq [\ln(z/2) + \gamma - 1] \} \text{ и т.д.}$$

(z<<1, q<<1).

Здесь $\gamma=0.57721\dots$ – постоянная Эйлера-Маскерони. Учитывая (3.4.7), (3.4.10), (3.4.12), (3.4.13), имеем

$$\psi = \psi_0 + \delta\psi, \quad \delta\psi \ll \psi_0 \quad (3.5.2)$$

где

$$\psi_0 = \exp(-m\vartheta) \mathcal{K}_{im\alpha}(ak\rho). \quad (3.5.3)$$

Подставив (3.5.2) в (3.4.3), получим, что

$$\varphi \approx \psi_0 - \frac{\delta\psi}{\alpha\psi_0}, \quad \psi_0 = m\vartheta - \frac{1}{a} \ln \{ \mathcal{K}_{im\alpha}(ak\rho) \}, \quad (3.5.5)$$

– угловые моды внутреннего и внешнего представлений соответствуют друг другу, и возможна сливка отдельно по каждой моде. Сопоставление по нулевой моде дает с учетом (3.5.1): из (3.4.7)

$$\begin{aligned} \varphi^{(0)} &\approx m\vartheta - \frac{1}{a} \ln \left(-\frac{\sqrt{2/\pi}}{ma} \sin \{ ma \ln(ak/2) + ma[\gamma + \ln(\rho)] \} \right) + \\ &+ \cancel{\frac{\pi m F_0}{a}} \operatorname{ctg} \{ ma \ln(ak/2) + ma[\gamma + \ln(\rho)] \} \approx \end{aligned} \quad (3.5.6)$$

$$\approx m\vartheta + am^2 \ln(\rho) \left[\frac{1}{2} \ln(\rho) + H_m \right].$$

Соответствие может быть достигнуто, когда $t \approx \ln(\alpha k/2) \approx -\pi/2$, поэтому примем

$$\ln(\alpha k/2) = -\frac{\pi}{2ma} + \beta \quad (3.5.7)$$

Подставив (3.5.7) в (3.5.6) и используя разложения по Тейлору функций \sin, \cos, \ln , получим

$$\beta \approx H_m - \gamma + \pi F_0 \quad (3.5.8)$$

Согласно (3.4.13), свободному ревербератору соответствует $F_0=0$, откуда сразу получаем формулу Хагана (3.1.4) для его асимптотического волнового числа, причем $H_m' = H_m - \gamma$. При наличии же границ имеем

$$k \approx k_0 (1 + \pi F_0) \quad (3.5.9)$$

или для частоты из (3.4.6)

$$\omega \approx \omega_0 + 2\pi a k^2 F_0 \quad (3.5.10)$$

Сопоставление по первой моде, в свою очередь, дает

$$\begin{aligned} \varphi^{(1)} &\approx \frac{c\rho}{4a} e^{-i\theta} + \frac{i\pi}{2} m a \rho \left(1 + tma [H_m - 1 + \ln(\rho)] \right) F_1 \approx \\ &\approx -\frac{i}{2} c e^{-i\theta} \left(\frac{1}{2} \ln(\rho) + B_m \right) \end{aligned} \quad (3.5.11) \checkmark$$

Обратим внимание, что во внутреннем разложении присутствует член, пропорциональный скорости дрейфа c . Собирая члены, пропорциональные c отдельно в правую и левую части, получим

$$c e^{-i\theta} \approx -2\pi tma k \left(1 + tma [H_m - 1 - 2B_m] \right) F_1 \quad (3.5.12)$$

Резюмируя, выпишем уравнения движения ревербератора:

$$\begin{aligned} d\varphi_0/dt &= 2\pi ak^2 F_0, \\ dx_0/dt &= -Re \{ 2\pi im a^2 k (1 - im B'_m) F_1 \}, \quad (3.5.13) \\ dy_0/dt &= Im \{ 2\pi im a^2 k (1 - im B'_m) F_1 \}, \end{aligned}$$

где φ_0 - начальная фаза ревербератора, x_0, y_0 - координаты его центра вращения, $B'_m = 1 + 2B_m - H_m$, а "силы" F_0, F_1 определяются положением границ по отношению к центру ревербератора формулой (3.4.13). "Сила" F_1 комплексна, ее аргумент отвечает направлению на ближайший участок границы. Согласно (3.3.8), (3.3.13), константы B'_m для первых m положительны:

$$B'_1 \approx 0.48, \quad B'_2 \approx 0.44, \quad B'_3 \approx 0.3 \quad (3.5.14)$$

Мы увидим, что этот факт соответствует отталкиванию ревербератора от границы.

Что же касается временного дрейфа (т.е. сдвига частоты), то соответствующая подвижность положительна, а так как сила F_0 для рассмотренных граничных условий также всегда положительна, то частота взаимодействующего ревербератора всегда больше частоты свободного.

3.6. Примеры.

а) Дрейф вблизи центра круговой области.

Пусть граница Γ' - окружность радиуса $S \gg (ak)^{-1}$, ядро смещено относительно центра окружности на расстояние s , под углом σ к оси x . Функция $L(\vartheta)$ в (3.4.13) имеет вид

$$L(\vartheta) = [S^2 - s^2 \sin^2(\vartheta - \sigma)]^{1/2} - s \cos(\vartheta - \sigma) \quad (3.6.1)$$

Согласно (3.4.12) должно быть $ak(S-s) \gg 1$. Рассмотрим случай,

когда $s \ll S$. Тогда вместо (3.6.1) имеем приближенно

$$L(\vartheta) \approx S - s \cos(\vartheta-\sigma) \quad (3.6.2)$$

Подставляя это выражение в (3.4.13), (3.5.13), получим:

$$\begin{aligned} d\phi_0/dt &\approx 2\pi ak^2 \exp(-2aks) I_0(2aks), \\ s ds/dt &\approx 2\pi ma^2 k \exp(-2aks) I_1(2aks), \\ ds/dt &\approx -2\pi m^2 a^3 k B'm \exp(-2aks) I_1(2aks) \end{aligned} \quad (3.6.3)$$

Здесь I_0 , I_1 - модифицированные функции Бесселя индексов 0, 1 (в традиционном определении).

Итак, в рассматриваемом предельном случае положение ревербератора в центре круговой области устойчиво. Будучи смещен из центра, он возвращается туда по логарифмической спирали. Если $m > 0$, т.е. сам ревербератор вращается против часовой стрелки, то ядро ревербератора при этом вращается вокруг центра области также против часовой стрелки. Радиальная компонента много меньше тангенциальной (отношение порядка a), обе скорости нарастают с удалением ревербератора от центра, при $s \ll (ak)^{-1}$ по линейному, при $(ak)^{-1} \ll s \ll S$ - по степенному закону.

б) Дрейф вдоль прямолинейной границы.

Пусть граница Γ - прямая $x=0$, ревербератор находится при $x=x_0 < 0$. Этот случай не удовлетворяет предположению о конечности области, и возникает вопрос, как следует интерпретировать выражение (3.4.13). Это трудность содержательная, так как в бесконечной области необходимо еще условие отсутствия источников на бесконечности. Его можно обеспечить, рассмотрев данную задачу как предельный случай

задачи о дрейфе в круговой области. Для этого устремим в формуле (3.6.1) $S \rightarrow +\infty$, зафиксировав $S - 3 = -x_0 > 0$ и $\sigma = 0$. Имеем

$$\exp(-2akL) \approx \begin{cases} \exp(-2ak|x_0|/\cos(\vartheta)), & -\pi/2 < \vartheta < \pi/2 \\ 0, & -\pi/2 < \vartheta < 3\pi/2 \end{cases} \quad (3.6.4)$$

При этом, согласно (3.4.12), должно быть $ak|x_0| \gg 1$. Применив для оценки "сил" метод Лапласа, получим уравнения движения:

$$\begin{aligned} d\varphi_0/dt &\approx (\pi a k^3 / |x_0|)^{1/2} \exp(-2ak|x_0|) \\ dx_0/dt &\approx -m^2 (\pi a^5 k / |x_0|)^{1/2} \exp(-2ak|x_0|) \\ dy_0/dt &\approx m (\pi a^3 k / |x_0|)^{1/2} \exp(-2ak|x_0|) \end{aligned} \quad (3.6.5)$$

Ревербератор движется почти параллельно границе, постепенно удаляясь от нее. Скорость дрейфа при этом уменьшается со временем. Радиус взаимодействия – характерное расстояние, на котором ревербератор еще "чувствует" границу – составляет $(ak)^{-1}$, т.е. много больше длины волны.

в) Дрейф в произвольной области.

В случае общего положения, если размеры среды много больше радиуса взаимодействия $(ak)^{-1}$, то расстояние от ядра ревербератора до разных участков границы различаются также много больше, чем на радиус взаимодействия. Тогда вклад в (3.4.13) будет вносить только ближайший к ядру участок границы, а вклад остальных участков экспоненциально мал, и применим метод Лапласа. Это приводит к уравнениям движения

$$\begin{aligned}\frac{d\varphi_0}{dt} &\approx \{\pi a k^3 \alpha / [\Delta(\alpha - \Delta)]\}^{1/2} \exp(-2ak\Delta), \\ \frac{dx_0}{dt} &\approx -m^2 \{\pi a^5 k \alpha / [\Delta(\alpha - \Delta)]\}^{1/2} \exp(-2ak\Delta), \quad (3.6.6) \\ \frac{dy_0}{dt} &\approx m \{\pi a^3 k \alpha / [\Delta(\alpha - \Delta)]\}^{1/2} \exp(-2ak\Delta),\end{aligned}$$

Система координат выбрана так, что в рассматриваемый момент ревербератор находится в начале координат, а ось x направлена на ближайший к нему участок границы. Δ – расстояние до этого участка, α – его радиус кривизны. При этом согласно (3.4.12) должно быть $ak\Delta \gg 1$, $ak\alpha \gg 1$.

Случай прямолинейной границы соответствует пределу $\alpha/\Delta \rightarrow \infty$. Наоборот, при $(ak)^{-1} \ll (\alpha - \Delta) \ll \alpha$ мы приходим к выражениям (3.6.3) для ревербератора в круговой области, если положим $\alpha = S$, $\Delta = S - s$ и учтем $aks \gg 1$. При еще меньших $|\alpha - \Delta|$ условие общего положения нарушается, метод Лапласа не применим, и требуется вычислять весь интеграл в (3.4.13): на примере круговой области это ясно видно.

Приведенные рассуждения не гарантируют асимптотическую точность формул (3.6.5), (3.6.6) в пределе $ak\Delta \rightarrow \infty$, и случай общего положения нуждается в более тщательном анализе. Дело в том, что в этом пределе подинтегральное выражение в (3.4.13) хотя и мало, но имеет острый пик. Вследствие этого коэффициенты F_n , согласно (3.4.13) имеют одинаковый порядок вплоть до $\pi \sqrt{(ak\Delta)^{-1}}$. Однако при таком соотношении аргументов и индексов асимптотические формулы (3.5.1) уже не справедливы. По-видимому, этот факт не влияет на оценку F_0 , F_1 , которые только и интересуют нас; однако он препятствует, например, получению поправки к скоростям следующего порядка по $(ak\Delta)^{-1}$.

К сожалению, простые оценки показывают, что непосредственная проверка полученных уравнений движения численным экспериментом должна быть весьма непроста, вследствие экспоненциальных зависимостей от малого параметра α . Так, для справедливости сделанных предположений размеры модельной среды должны быть не меньше, чем длина волны k^{-1} и радиус взаимодействия $(\alpha k)^{-1}$. Однако уже при $\alpha \approx 0.2$ (существенно большие α брать бессмысленно, т.к. все формулы выписаны с точностью до членов, имеющих относительный порядок малости α) эти величины должны примерно в $10^3 - 10^4$ раз превышать размер ядра ревербератора, который по порядку величины равен единице.

3.7. Обсуждение.

Свободный ревербератор характеризуется тремя произвольными константами: координатами центра вращения и начальной фазой. Взаимодействие приводит к тому, что эти параметры со временем изменяются, т.е. к пространственному и временному дрейфу. Соответствующие скорости пропорциональны действующим силам, которые зависят от положения ревербератора относительно границ. Скалярная сила F_0 , определяет временной дрейф, векторная F_1 - пространственный. Коэффициенты пропорциональности - "подвижности" - определяются топологическим зарядом ревербератора.

Два из этих коэффициентов - временная подвижность и подвижность в направлении действующей векторной силы (далее будем называть ее продольной подвижностью) - являются скалярами. Подвижность в направлении, перпендикулярном векторной силе (поперечная подвижность) - псевдоскаляр: она отражает

внутреннюю асимметрию ревербератора и меняет знак при изменении топологического заряда на противоположный.

Величина сил убывает на больших расстояниях экспоненциально; характерный радиус взаимодействия одинаков для них обеих и определяется свойствами излучаемых плоских волн.

Направление векторной силы при больших расстояниях до границы в первом приближении совпадает с направлением на ближайший участок границы. Это приближение связано, в частности, с тем, что мы пренебрегли отличием формы волны от круговой, тогда как она на самом деле является спиральной. Поэтому можно предположить, что в следующем приближении появится "перекос" (псевдовекторная компонента), тем больше, чем меньше расстояние. Знак этого перекоса должен зависеть от знака топологического заряда ревербератора – это очевидно из соображений симметрии. Если это предположение верно, то при приближении к прямолинейной границе направление дрейфа будет меняться.

Знак продольной подвижности имеет большое значение. Если ревербератор притягивается к границе, то для взаимодействующих ревербераторов следует ожидать образования связанных пар или взаимной аннигиляции ("активное" поведение). В противном случае следует ожидать "пассивного" поведения, когда ревербераторы расходятся на "безопасное расстояние", после чего перестают замечать друг друга. Напомним, что в численных экспериментах наблюдалось как пассивное поведение ревербераторов, так и активное.

Глава 4. ТЕОРИЯ ЭВОЛЮЦИИ СВИТКОВ.4.1. Эволюция скрученного свитка.а) Вывод эволюционного уравнения.

Мы будем рассматривать задачу об эволюции скрученного свитка в реакционно-диффузионной системе (1.1.1) в цилиндрической области $x^2+y^2 < R^2$, с граничными условиями

$$\frac{\partial u}{\partial r} = 0, \quad x^2+y^2=R^2 \quad (4.1.1)$$

При этом будем предполагать, что ось вращения свитка совпадает с осью цилиндра. По поводу специфики неограниченного пространства см. разд. 4.3.

Используемый здесь метод по существу идентичен использованному в разд. 2.3, в связи с этим некоторые обозначения совпадают, хотя обозначают совсем разные вещи. Автор надеется, что это не приведет к недоразумению, т.к. здесь нет никаких формальных ссылок на разд. 2.3.

Предполагается, что известно семейство решений (1.1.1), (4.1.1) в виде свитков с различной (в каждом случае постоянной) скрученностью γ :

$$u = U(\rho, \vartheta - \omega(\gamma)t + \gamma z, \gamma), \quad (4.1.2)$$

причем возможные значения γ образуют некоторый интервал. Здесь ρ, ϑ – полярные координаты в плоскости (x, y) . Следовательно, функция $U(\rho, \xi, \gamma)$ удовлетворяет уравнению

$$D (\tilde{\nabla}^2 U + \gamma^2 U_{\xi\xi}) + \omega(\gamma) U_\xi + f(U) = 0 \quad (4.1.3)$$

и граничным условиям

$$U_\rho(R, \xi, \gamma) = 0 \quad (4.1.4)$$

Здесь $\tilde{\nabla}^2$ – лапласиан в плоскости (\tilde{x}, \tilde{y}) , в которой ρ, ξ являются полярными координатами.

Чтобы решения типа (4.1.2) были физически реализуемы,

они должны еще быть в разумном смысле устойчивы. В силу симметрии уравнений (1.1.1) и граничных условий (4.1.1) устойчивость должна быть нейтральной по отношению к смещению возмущаемого решения вдоль Z , вдоль t или повороту вокруг оси цилиндра. В силу симметрии решений (4.1.2) все эти три вида возмущений эквивалентны. Будем предполагать, что по отношению к остальным видам возмущений имеет место асимптотическая устойчивость по линейному приближению.

В случае неограниченного трехмерного пространства должна еще быть нейтральная устойчивость по отношению к сдвигам вдоль x и y ; эта нейтральность создает возможность движения вдоль этих координат, изучение которой представляет собой отдельную задачу и выходит за рамки настоящего раздела. В следующем разделе будет изучаться такая задача для случая нулевых скрученостей.

Как и при выводе уравнения ММАВ, выбор функции U содержит произвол. Так, если некоторая $U(r, \xi, \gamma)$ удовлетворяет (4.1.3), (4.1.4), то U^K , полученная преобразованием

$$U^K(\rho, \xi, \gamma) = U(\rho, \xi + K(\gamma), \gamma) \quad (4.1.5)$$

для любой $K(\gamma)$ также удовлетворяет (4.1.3), (4.1.4).

Будем искать решения в виде свитков с переменной скрученностью:

$$u = U(\rho, \vartheta + \Phi(z, t), \Phi_z(z, t)) + v, \quad (4.1.6)$$

где Φ_z, Φ_t - медленно меняющиеся функции z, t , так что в довольно больших областях Φ близко к $\Phi_0 - \omega(\gamma)t + \gamma z$ для некоторых Φ_0, γ , а v - малая добавка. Подставляя (4.1.6) в (1.1.1), получим в линейном приближении по v :

$$v_t = F v + D \nabla^2 v + h. \quad (4.1.7)$$

Здесь как матрица коэффициентов F , так и свободный член h определяются видом функции Φ :

$$F = \left. \frac{\partial f(u)}{\partial u} \right|_{u=U}, \quad (4.1.8)$$

$$h = -U_\xi \omega(\Phi_z) - U_\xi \Phi_t - U_\gamma \Phi_{zt} + \quad (4.1.9)$$

$$+ D [(U_\xi + 2U_{\xi\gamma}\Phi_z) \Phi_{zz} + U_\gamma \Phi_{zzz} + U_{\gamma\gamma} \Phi_{zz}^2]$$

(здесь использовано тождество (4.1.3)).

В силу предположения о характере функции Φ можно считать, что коэффициенты и свободный член в (4.1.7) в больших масштабах зависят от z и t практически только через "винтовую координату" $\xi \approx \theta + \gamma z - \omega t + \Phi_0$. Пренебрегая различиями, получим, что что уравнение (4.1.7) есть уравнение на возмущение свитка с постоянной скрученностью, причем "возмущающая" сила h имеет ту же (винтовую) симметрию, что и возмущаемое решение. Заметим для дальнешего, что это лишь частный вид возможных возмущений.

В соответствии с предположением об устойчивости, v не будет неограниченно возрастать в силу (4.1.7), если только h не имеет компоненты вдоль сдвиговой моды $V = \partial U / \partial \xi$. Это условие можно записать в виде

$$\iint W h \, d\tilde{x} \, d\tilde{y} = 0 \quad (4.1.10)$$

где $W(\rho, \xi)$ – собственная функция (вектор-строка) сопряженно-го к (4.1.7) уравнения с собственным значением 0, соответствующая сдвиговой моде V .

Замечание. Интеграл в (4.1.10) и аналогичные интегралы, которые встречаются ниже, сходятся, поскольку берутся от ограниченной функции по ограниченной области (по кругу). В случае неограниченного трехмерного пространства встает вопрос об их сходимости. По-видимому, этот вопрос не праздный, и связан с физической постановкой задачи. Задача в цилиндре может быть поставлена и решена даже если скрученный вихрь не является источником, да и вообще если среда не является аутоволновой; в неограниченном пространстве это, видимо, не так. Подробнее этот вопрос будет обсуждаться в разд. 4.3.

Выберем нормировку таким образом, чтобы

$$\iint W U_\xi \tilde{dx} \tilde{dy} = 1 \quad (4.1.11)$$

Подставляя (4.1.9) в (4.1.10), получим искомое эволюционное уравнение для Φ :

$$\begin{aligned} \Phi_t + q(\Phi_z) \Phi_{zt} + \omega(\Phi_z) &= \\ = R(\Phi_z) \Phi_{zz} + S_4(\Phi_z) \Phi_{zz}^2 + S_3(\Phi_z) \Phi_{zzz}, & \end{aligned} \quad (4.1.12)$$

где

$$q(\gamma) = \iint_W U \tilde{dx} \tilde{dy}$$

$$R(\gamma) = \iint_W D(U_\xi + 2\gamma U_{\xi\gamma}) \tilde{dx} \tilde{dy}$$

$$S_4(\gamma) = \iint_W D U_{\gamma\gamma} \tilde{dx} \tilde{dy}$$

$$S_3(\gamma) = \iint_W D U_\gamma \tilde{dx} \tilde{dy} \quad (4.1.13)$$

Без ограничения общности можно считать, что $q(\gamma) \equiv 0$: этого всегда можно добиться, используя произвол (4.1.5), выбрав подходящую калибровочную функцию $K(\gamma)$.

Если все коэффициенты диффузии одинаковы ($D_{ij} = D \delta_{ij}$), то

тогда и $S_3(\gamma) \equiv 0$. Если к тому же скрученностя малы, то $R(\gamma) \approx d$.

В силу сделанных предположений о медленности изменения скрученностя, главным членом в правой части (4.1.12) является всегда первый (в следующем пункте это будет проиллюстрировано на конкретном примере). Поэтому вместо (4.1.12) можно написать:

$$\Phi_t + \omega(\Phi_z) = R(\Phi_z) \Phi_{zz} \quad (4.1.14)$$

Дифференцируя (4.1.14) по z , получим для локальной скрученностя $\gamma = \Phi_z$ уравнение нелинейной диффузии со сносом:

$$\frac{\partial \gamma}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\omega(\gamma) + R(\gamma) \frac{\partial k}{\partial x} \right), \quad (4.1.15)$$

причем скорость сноса есть $\omega'(\gamma)$, а коэффициент нелинейной диффузии – $R(\gamma)$. Естественно, ниже мы будем предполагать, что $R > 0$, в противном случае эволюционное уравнение не применимо.

б) Некоторые свойства эволюционного уравнения.

Заметим, что уравнение (4.1.15) лишь обозначениями отличается от одномерного уравнения ММАВ (2.2.13), свойства которого обсуждались подробно в пп. 2.2.4-2.2.6. Коротко повторим здесь некоторые из них.

I. Устойчивость по скрученностя. Свиток бесконечной длины с постоянной скрученностя γ_0 устойчив относительно малых изменений скрученностя (которым могут отвечать и большие изменения u). Эволюция этих малых возмущений определяется дрейфом вдоль свитка с групповой скоростью $d\omega(\gamma_0)/d\gamma$ и диффузионным размыванием, определяемым коэффициентом

диффузии скрученности $R(\gamma_0)$. При малых скрученностях эволюционное уравнение нелинейной заменой может быть приведено к уравнению диффузии.

II. Мягкие волны перепада. Волна перепада между участками с разными скрученностями γ_1, γ_2 движется по правилу непрерывности фаз со скоростью $(\omega(\gamma_1) - \omega(\gamma_2)) / (\gamma_1 - \gamma_2)$. Характерная ширина волны перепада составляет $R / (d^2\omega/d\gamma^2(\gamma_1 - \gamma_2))$, и при близких γ_1 и γ_2 может быть сколь угодно большой.

III. Функционал Ляпунова. Функционал "энергии скрученности" $K[\gamma] = \frac{1}{2} \int \gamma^2 dz$ в силу эволюционного уравнения не возрастает при "нейтральных" граничных условиях (при отсутствии "закручивающей силы"). Такими условиями, в частности, являются: условия непроницаемости; условие периодичности; для бесконечного свитка - одинаковые предельные скрученности γ_0 . В последнем случае энергию скрученности нужно отсчитывать от бесконечного значения, которое соответствует бесконечному свитку с постоянной скрученностью γ_0 . Диссипация "энергии скрученности" равна нулю только на свитках с постоянной скрученностью.

IV. Принцип максимума. Максимальное значение скрученности со временем не увеличивается (почти всегда уменьшается), минимальное - соответственно почти всегда увеличивается, если только эти значения достигаются не на границах свитка (или в отсутствие "закручивающей силы").

4.2. Эволюция изогнутого свитка.

а) Предварительные замечания.

Предполагается, что состояние свитка может быть охарактеризовано положением его нити - достаточно гладкой

кривой, вокруг которой происходит циркуляция вихря на малых временах. В сечениях, перпендикулярных этой кривой, на небольших расстояниях от нее наблюдаются режимы, аналогичные ревербератору. На больших временах, вообще говоря, происходит движение этой кривой. Эти предположения основаны на наблюдениях в численных и натурных экспериментах (см. разделы 1.4, 1.5).

Следующие утверждения представляются весьма правдоподобными, и некоторыми авторами воспринимаются как само собой разумеющиеся:

I. Положение нити является параметром порядка в процессе эволюции изогнутого свитка, т.е. ее эволюция может быть в некотором приближении описана замкнутым уравнением.

II. Эволюция нити в некотором приближении локальна, т.е. может быть, например, описана уравнением в частных производных.

На эти утверждения наводят аналогия с ревербератором, для которого положение его ядра является параметром порядка. Численные эксперименты показывают, что эволюция ревербератора в отсутствие сильных неоднородностей или других автоволновых источников имеет локальный характер, т.е. определяется местными причинами.

В настоящем разделе мы покажем, как уравнение для эволюции нити может быть выведено из "первых принципов", на основе решения двумерных задач на собственные значения, подобно тому, как это было сделано в предыдущем разделе для скрученности прямого свитка. Приведенные выше утверждения будут при этом использованы как самосогласованные предположения, т.е. справедливость их будет проверяться полученным

результатом.

Основным постулатом, как и в предыдущем разделе, будет существование у р.д.с. (1.1.1) решений в виде стационарно вращающегося ревербератора (1.2.1) (более общая форма (4.1.2) не понадобится, т.к. здесь мы будем рассматривать изогнутые, но не скрученные свитки). Основой для применения теории возмущений будет то предположение, что точное решение (1.1.1) в виде свитка в каждом сечении, перпендикулярном нити, будет на не слишком большом удалении от нее близко к (1.2.1).

Коль скоро задано движение нити вихря как кривой в трехмерном пространстве $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s, t) \in \mathbb{R}^3$, где s - скалярный параметр кривой, t - время, то можно ввести локальную систему координат в ее окрестности (конечно, движущуюся), например, по следующим правилам:

1. Ось z направлена вдоль нити:

$$\mathbf{e}_z = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial l} \quad (4.2.1)$$

2. Ось x направлена вдоль главной кривизны нити:

$$\mathbf{e}_x = \frac{\partial \mathbf{e}_z}{\partial l} \quad (4.2.2)$$

3. Ось y направлена по бинормали:

$$\mathbf{e}_y = [\mathbf{e}_z \mathbf{e}_x] \quad (4.2.3)$$

Здесь $\partial/\partial l$ - оператор дифференцирования по длине нити:

$$\frac{\partial g}{\partial l} = \frac{\partial g}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial l} \quad (4.2.4)$$

Определенная таким образом система координат является в каждый момент времени правой ортонормированной системой.

Перейдя в эту движущуюся и искривленную систему координат, мы получим уравнение, правая часть которого при не слишком большом удалении от нити близка к правой части (1.1.1), и в каждом сечении можно ожидать существования решений в виде дрейфующего ревербератора. Потребовав, чтобы центр вращения ревербератора в каждом сечении совпадал с точкой $x=y=0$, мы получим уравнение движения нити. Этот метод является непосредственным обобщением методов, использованных в разд. 2.3, 4.1.

Однако для получения главных членов уравнения оказывается достаточно более простой с точки зрения выкладок процедуры. А именно, выберем "лабораторную" декартову неподвижную систему отсчета не произвольным образом, а таким, чтобы она совпадала с (4.1.1-4.1.3) в некоторой точке кривой в некоторый момент времени. Тогда, коль скоро характерный масштаб искривлений нити велик, а скорость ее движения мала, то в большой окрестности начала координат и выбранного момента времени мы будем иметь вихрь с нитью, которая почти параллельна оси Z и мало от нее отклоняется (такой выбор системы отсчета был использован в работе [Yakizhevich 1984]).

б) Вывод эволюционного уравнения: постановка задачи.

Итак, будем искать решение (1.1.1) в виде изогнутого свитка, нить которого почти параллельна оси Z и близка к ней:

$$u = U(x-X(z,t), y-Y(z,t), t) + v(x,y,z,t) \quad (4.2.5)$$

Здесь функция U - другое обозначение для функции U_r (1.2.1), описывающей стационарный ревербератор:

$$U_r(\rho, m\vartheta - \omega t) \equiv U(\rho \cos \vartheta, \rho \sin \vartheta, t) \quad (4.2.6)$$

Не следует путать ее с семейством плоских периодических волн (разд. 2.2) или со скрученным свитком (разд. 4.1)

В соответствии со сделанными предположениями $X(z, t)$, $Y(z, t)$, $v(x, y, z)$ в (4.2.5) малы, и X , Y - медленно меняются. Будем считать самосогласованным образом, что все они имеют одинаковый порядок малости ε , и, кроме того, что $X=X'(\delta z, \delta^2 t)$, $Y=Y'(\delta z, \delta^2 t)$; $\varepsilon, \delta \ll 1$.

Основная идея вывода та же, что и при эвристическом анализе эволюции ММАВ и скрученного свитка: нужно подобрать такие X , Y , чтобы v все время оставалась малым.

в) Линеаризация.

Подставим (4.2.5) в (1.1.1) и перейдем к новым независимым переменным:

$$t' = t, \quad z' = z, \quad x' = x - X(z, t), \quad y' = y - Y(z, t) \quad (4.2.6)$$

(соответственно будем обозначать ρ' , ϑ' - полярные координаты в плоскости (x', y')).

После этого ограничимся линейным по ε приближением и учтем, что функция (1.2.1) есть решение уравнения (1.1.1). То, что получится, удобно переписать в виде уравнения для v :

$$\frac{v}{t'} = D \tilde{\nabla}^2 v + F'[U] v + h'[U], \quad (4.2.7)$$

где

$$F'[U] = \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{u=U}, \quad (4.2.8)$$

$$h'[U] = U_x X_{t,t} + U_y X_{t,z} - D(U_x X_{z,z} + U_y Y_{z,z}) \quad (4.2.9)$$

Здесь подразумевается, что $U=U(x', y', t')$.

Далее, вплоть до получения эволюционного уравнения, пренебрежем зависимостью X, Y от своих аргументов, рассматривая, однако, их производные как параметры - в полной аналогии с соответствующей процедурой, примененной при выводе эволюционных уравнений для ММАВ и для скрученного вихря.

Тогда уравнение (4.2.7) является линейным уравнением с периодическими по времени коэффициентами F и периодическим по времени свободным членом h . Удобно далее перейти во вращающуюся систему координат, с тем, чтобы коэффициенты F перестали зависеть от времени:

$$\begin{aligned} x'' &= x' \cos(\omega t) + y' \sin(\omega t), \\ y'' &= -x' \sin(\omega t) + y' \cos(\omega t), \\ z'' &= z', \\ t'' &= t' \end{aligned} \quad (4.2.10)$$

Пусть при этом (ρ'', ϑ'') - полярные координаты в плоскости (x'', y'') , так что $\vartheta'' = \vartheta' - \omega t$, и ∇''^2 - лапласиан в этой плоскости. В результате получим

$$v_{t''} = D \nabla''^2 v + \omega \frac{\partial}{\partial \vartheta''} v + F'' v + h''. \quad (4.2.11)$$

Здесь

$$F'' = \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{u=U_p(\rho'', \vartheta'')} \quad (4.2.12)$$

- не зависит от времени. Свободный член же по-прежнему осциллирует:

$$\begin{aligned} h'' &= (X_{t''} - X_{z''z''} D) (\cos(\omega t) U_{x''} - \sin(\omega t) U_{y''}) + \\ &+ (Y_{t''} - Y_{z''z''} D) (\sin(\omega t) U_{x''} + \cos(\omega t) U_{y''}) \end{aligned} \quad (4.2.13)$$

Соответствующее однородное уравнение имеет следующие незатухающие во времени решения:

$$\begin{aligned} V^x &= \cos(\omega t) \frac{\partial U}{\partial x''} - \sin(\omega t) \frac{\partial U}{\partial y''} \\ V^y &= \sin(\omega t) \frac{\partial U}{\partial x''} + \cos(\omega t) \frac{\partial U}{\partial y''} \\ V^t &= \frac{\partial U}{\partial \psi''} \end{aligned} \quad (4.2.14)$$

в соответствии с симметрией задачи: моды V^x , V^y , V^t соответствуют бесконечно малым сдвигам возмущаемого решения $U(x, y, t)$ вдоль x , y , t соответственно. Будем предполагать, что других незатухающих решений нет.

Это означает, что у уравнения (4.2.11) есть следующие собственные значения на мнимой оси: пара $\pm i\omega$, которой соответствуют собственные функции

$$V^\pm = U_{x''} \pm i U_{y''} \quad (4.2.15)$$

и собственное значение 0, которому соответствует собственная функция

$$V^0 = U_{\psi''} \quad (4.2.16)$$

Используя обозначение (4.2.15), можно переписать свободный член (4.2.13) в виде

$$h = \operatorname{Re} (e^{i\omega t} (R_{t''} + R_{z''z''} D) V^+), \quad (4.2.17)$$

где введено обозначение $R(z'', t'') = X(z'', t'') + iY(z'', t'')$.

г) Условие отсутствия резонансных членов.

Для того, чтобы при наличии незатухающих решений у однородного уравнения соответствующее неоднородное уравнение

имело ограниченные при $t \rightarrow +\infty$ решения, необходимо, чтобы свободный член h'' был ортогонален в среднем по времени ко всем незатухающим решениям союзного однородного уравнения

$$w_{t''} = D \nabla''^2 w - \omega \frac{\partial}{\partial \theta''} w + F^T w \quad (4.2.18)$$

Подразумевается, что скалярное произведение дается формулой

$$\langle w, v \rangle \equiv \iint \langle w(x, y), v(x, y) \rangle dx dy \quad (4.2.19)$$

где \langle , \rangle – скалярное произведение в \mathbb{R}^l , а двойной интеграл берется по всей плоскости.

В данной задаче встает вопрос о сходимости интегралов типа (4.2.19), и его нельзя обойти так же просто, как в задаче о скрученном свитке (см. разд. 4.1). Этот вопрос будет обсуждаться в разд. 4.3.

Поскольку h осциллирует, то он заведомо ортогонален в среднем к постоянному во времени решению союзного уравнения, соответствующего собственному значению 0. Этот факт означает, что изгиб нити не оказывает влияния на фазу, и, следовательно, на скрученность вихря. С другой стороны, неосциллирующая компонента h , возникающая в результате переменной скрученности (см. предыдущий раздел), заведомо ортогональна в среднем к осциллирующим решениям сопряженного уравнения, вследствие чего переменная скрученность не влияет на движение нити. Таким образом, в рассматриваемом приближении движение нити вихря и эволюция его фазы независимы. В работе Кинера [1988], посвященной этой же задаче, этот факт остался незамеченным.

Обозначим собственную функцию сопряженного уравнения, соответствующего с.з. $i\omega$, через W^+ , предполагая, что $\langle W^+, V^+ \rangle = 1$. Тогда условие ортогональности к вращающимся модам

$$\int_0^{2\pi/\omega} \langle e^{i\omega t} W^+, h \rangle dt = 0 \quad (4.2.20)$$

приведет к искомому эволюционному уравнению:

$$R_t = \langle W^+, DV^+ \rangle R_{zz}, \quad (4.2.21)$$

(штрихи здесь можно уже опустить), или, в обычных обозначениях,

$$\begin{aligned} X_t &= P_1 X_{zz} + P_2 Y_{zz} \\ Y_t &= -P_2 X_{zz} + P_1 Y_{zz} \end{aligned} \quad (4.2.22)$$

где

$$P_1 + iP_2 = \langle W^+, DV^+ \rangle \quad (4.2.23)$$

Заметим, что если все коэффициенты диффузии в (1.1.1) равны d , то $P_1=d$, $P_2=0$ в соответствии с частным случаем, на который указали Панфилов и др. [1986].

д)-Инвариантная форма эволюционного уравнения.

Уравнения (4.2.22) записаны в покоящейся системе координат, ось Z которой направлена вдоль нити в некоторой ее точке. Если эта система выбрана в соответствии с правилами п.4.2.1, то $\partial^2 Y / \partial z^2 = 0$, и в точке $z=0$

$$\begin{aligned} X_t &= P_1 K \\ Y_t &= -P_2 K \end{aligned} \quad (4.2.24)$$

где $K=\partial^2 X(0,t)/\partial z^2$ – кривизна нити в данной точке. "На словах" уравнение (4.2.4) может быть переформулировано следующим образом: смещение нити перпендикулярно самой себе происходит со скоростью, пропорциональной кривизне, в двух направлениях: по главной нормали (вдоль e_x) с коэффициентом

пропорциональности P_1 , и по бинормали (вдоль e_y) с коэффициентом $-P_2$. В терминах уравнения нити $r(s,t)$ это может быть записано как

$$\frac{\partial r}{\partial t} = P_1 \frac{\partial^2 r}{\partial l^2} - P_2 \left[\frac{\partial r}{\partial l} \frac{\partial^2 r}{\partial l^2} \right] \quad (4.2.25)$$

где l - длина вдоль нити (оператор дифференцирования $\partial/\partial l$ определен в (4.2.4)).

е) Ляпуновский функционал.

Рассмотрим функционал

$$S(t) \equiv \int \left| \frac{\partial r(s,t)}{\partial s} \right| ds, \quad (4.2.26)$$

т.е полную длину нити. В силу (4.2.25) имеем:

$$\frac{ds}{dt} = -P_1 \int \left(\frac{\partial r}{\partial l} \right)^2 dl, \quad (4.2.27)$$

при условии, если на границах среды задано условие непроницаемости, т.е. нить всегда перпендикулярна границам.

Таким образом, длина нити уменьшается, если только нить не прямая и если $P_1 > 0$. Прямая нить, как видно из (4.2.24), не эволюционирует. При $P_1 > 0$ уравнение (4.2.24) не корректно (нет непрерывной зависимости от начальных данных). Однако, как известно, на аналитических начальных данных решения такого рода уравнений могут существовать. Для этих решений (4.2.27) дает монотонное увеличение длины до тех пор, пока не нарушается условия применимости эволюционного уравнения.

4.3 О локальности эволюции свитков.

Мы упоминали выше проблему сходимости интегралов вида

(4.1.10), (4.2.19), определяющих скалярное произведение функций на плоскости в задачах об эволюции свитка в неограниченном пространстве. Для того, чтобы несколько прояснить эту проблему, обратимся к физическому смыслу функций $W^{\pm,0}$.

Заметим, что уравнение (4.2.7) есть не что иное, как уравнение на возмущение ревербератора внешним воздействием $h'(x,t)$. Легко видеть, что функции W^\pm , W^0 представляют собой в этом случае численное выражение чувствительности пространственного положения и фазы ревербератора по отношению к тем или иным возмущениям.

Из натурных и численных экспериментов известно, что эта чувствительность быстро падает с удалением "точки приложения" внешних сил от ядра. Результаты гл. 3 на конкретном примере показывают, что зависимость здесь экспоненциальная. Для сходимости же упомянутых интегралов достаточно лишь, чтобы чувствительность падала быстрее чем $|r|^{-1}$, поскольку функции $V^{\pm,0}$ ограничены. С этой точки зрения, примененное Кинером [1988] "приведенное к площади" скалярное произведение бессмысленно, поскольку тождественно обращается в 0.

Итак, сходимость интегралов (4.1.10), (4.2.19) вытекает из экспериментальных фактов и подтверждается анализом конкретной модели. С точки зрения здравого смысла, такое поведение должно быть в тех и только в тех случаях, когда вихрь является источником автоволн, т.е. групповая скорость направлена наружу. Однако с математической точки зрения такое утверждение не является тривиальным и нуждается в дальнейшем изучении.

Глава 5. ЧИСЛЕННЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ ПО ЭВОЛЮЦИИ РЕВЕРБЕРАТОРОВ.

5.1. О постановке численных экспериментов.

Постановка двумерных и трехмерных (гл. 6) экспериментов в общих чертах совпадает. Используется система уравнений типа ФитцХью-Нагумо, близкая к использованной Перцовым и Панфиловым [1981]:

$$\begin{cases} u_t = f(u) - v + \nabla^2 u + h(r, t) \\ v_t = \varepsilon(u)(u - v) \end{cases} \quad (5.1.1)$$

где $f(u)$ – N -образная кусочно-линейная непрерывная функция,

$$f(u) = \begin{cases} -g_1 u, & u < u_1 \\ -g_1 u_1 + g_f(u - u_1), & u_1 < u < u_2 \\ g_2(1 - u) & u > u_2 \end{cases} \quad (5.1.2)$$

$\varepsilon(u)$ – кусочно-постоянная функция,

$$\varepsilon(u) = \begin{cases} \varepsilon_1, & u < u_1 \\ \varepsilon_2, & u_1 < u < u_2 \\ \varepsilon_3, & u > u_2 \end{cases} \quad (5.1.3)$$

Типичные значения параметров: $g_1=4$, $g_f=1$, $g_2=15$, $u_1=0.08$, $\varepsilon_1=\varepsilon_3=1.5$, $\varepsilon_2=0.06$. В "кардиологической" интерпретации u – трансмембранный потенциал, v определяется физиологическим состоянием мембраны. Функция h соответствует внешнему току ("стимуляция") и меняется от эксперимента к эксперименту.

Вычисления проводились на равномерной по пространству и по времени сетке, по явной схеме методом Эйлера. Типичные шаги сеток: по пространству – 1.2, по времени – 0.12. Границные условия для u – непроницаемость границ:

$$(nv) u|_{\Gamma} = 0. \quad (5.1.4)$$

Начальные условия задавались следующим приемом. В покоящейся среде импульсами противоположной полярности создается "двойной слой", из которого развивается автогенерация. Линия (поверхность), на которой задан двойной слой, имеет обрыв (край), и вокруг этого края закручивается ревербератор (свиток), который, после периода установления в несколько оборотов, и используется для экспериментов.

5.2. Эволюция ревербератора под действием локализованной стимуляции.

а) Общие соображения.

Электрическая стимуляция является одним из широко используемых способов борьбы с нарушениями сердечного ритма, в частности, с тахикардией циркуляционного типа. Несмотря на широкое применение этого метода, механизмы и условия успешности его применения изучены не достаточно. Этим определяется интерес к теоретическому и модельному изучению воздействия внешних стимулов на ревербераторы.

Здесь мы рассмотрим действие локализованных стимулов. В (5.1.1) роль этих стимулов отведена функции \hbar . Для простоты анализа и интерпретации будем рассматривать лишь стимул с зависимостью от времени "в виде δ-функции", что соответствует временам нанесения стимула много меньшим, чем характерные времена рассматриваемой среды. Тогда параметрами стимула являются энергия, место и время нанесения и геометрические характеристики.

б) Одномерная аналогия.

Прежде чем приступить к анализу двумерных процессов, рассмотрим одномерный случай. Пусть по возбудимому кольцу

циркулирует импульс - это одномерный аналог ревербератора. Известно, что в зависимости от параметров стимула возможен один из следующих исходов:

- 1) Циркуляция импульса продолжается, а эффект воздействия сводится к сдвигу фазы циркуляции. Только это может быть при достаточно малой энергии стимула.
- 2) Циркуляция прекратится. Именно этот случай интересен на практике (купирование тахикардии).

Интервал времени, в который может быть послан стимул с данными параметрами, будем называть фазой купирования. Начало и конец этой фазы зависят от амплитуды и геометрии стимула. Будем считать, что место нанесения (центр) стимула фиксировано, а интенсивность стимула равномерно распределена на некотором отрезке. Длину этого отрезка будем называть размером электрода.

В самом грубом приближении фазу купирования можно определить, опираясь на понятия фаз абсолютной и относительной рефрактерности. В процессе циркуляции импульса по кольцу в каждой точке эти фазы последовательно сменяют друг друга.

Если импульс нанесен в фазу абсолютной рефрактерности и его амплитуда не превосходит физиологических величин, то, по определению, можно быть уверенным, что стимул практически не скажется на циркуляции импульса (случай 1). Если импульс нанесен в фазу относительной рефрактерности, когда среда уже достаточно "отдохнула", то от места нанесения стимула в обе стороны побежит по волне возбуждения. Та волна возбуждения, которая побежит навстречу исходному импульсу, аннигилирует с ним. Однако волна, побежавшая вслед, продолжит циркуляцию - мы опять получим случай 1.

Из приведенного ясно, что на фазу купирования существенно влияет размер электрода: в пренебрежении им в самом грубом приближении фаза купирования отсутствует.

Для конечного электрода нами не рассмотрены еще случаи, когда в момент нанесения стимула электрод покрывает одновременно участки среды, находящиеся в обеих фазах, т.е. покрывает передний или задний фронт волны возбуждения.

Если электрод перекрывает передний фронт, воздействие сводится к тому, что передний фронт осуществляет "мгновенный скачок" до передней кромки электрода, т.е. опять мы имеем случай 1 (см., впрочем, разд. 5.3).

И только если электрод перекрывает задний фронт, мы имеем случай 2 (см. рис. 5.2.1). Стимуляция приводит к распространению только в одну сторону - распространение в другую сторону в этот момент заблокировано. Вновь рожденный

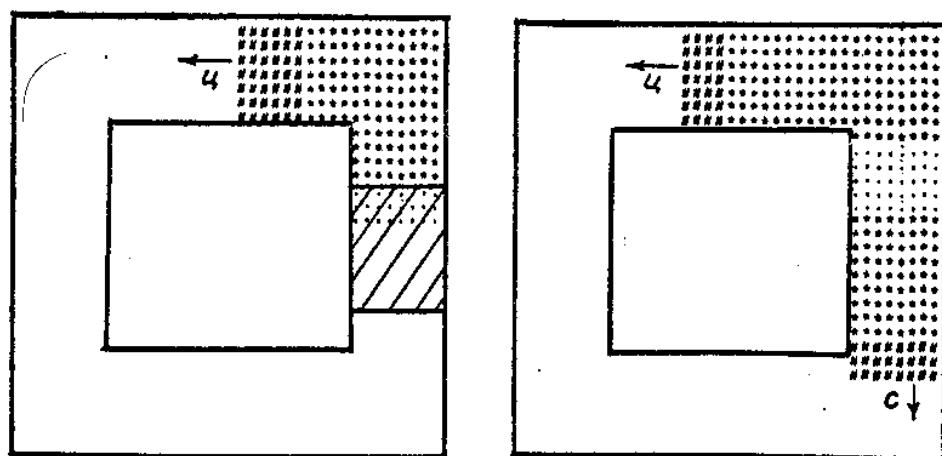


Рис. 5.2.1. СНЯТИЕ ЦИРКУЛЯЦИИ В КОЛЬЦЕ. Стрелками обозначено направление движения импульсов. Первоначально циркулировавший импульс обозначен "Ц" при $T=130$. Произведена стимуляция, положение электрода обозначено штриховкой. В результате стимуляции родился новый импульс, он обозначен "С", $T=140$. Эти импульсы движутся навстречу друг другу, после их столкновения среда переходит в состояние покоя.

импульс движется навстречу первоначальному, затем происходит их аннигиляция и среда переходит в состояние покоя.

На рис. 5.2.2 изображены типичные зависимости фазы купирования от размера электрода и амплитуды стимула. Ширина фазы купирования действительно растет с увеличением размера электрода. Она появляется только при амплитудах, значительно превышающих порог возбуждения покоящейся ткани. При увеличении амплитуд фаза купирования расширяется, однако это расширение в дальнейшем становится все более слабым.

Пороговый характер зависимости фазы купирования от амплитуды импульса достаточно очевиден. Большая величина порога связана с тем, что должен быть возбужден участок ткани в ранней стадии относительной рефрактерности.

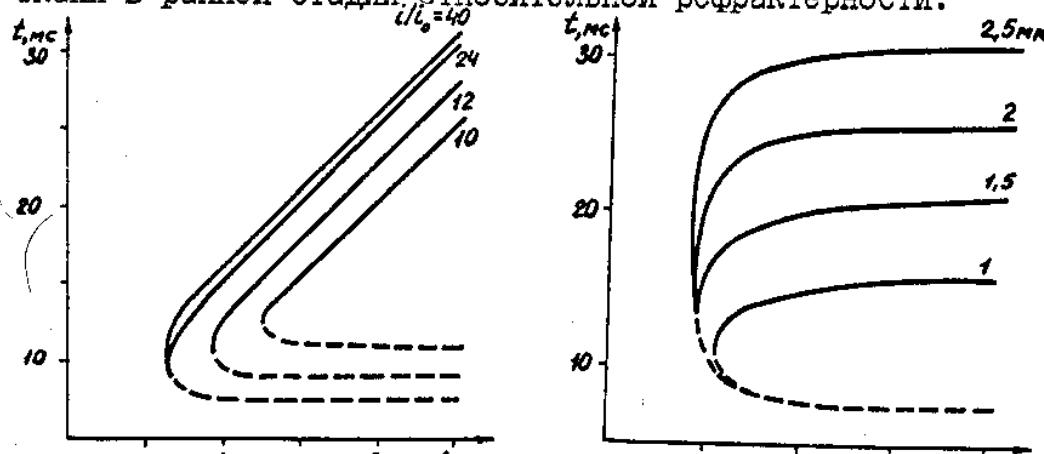


Рис. 5.2.2. ФАЗА КУПИРОВАНИЯ в зависимости: а) от размера электрода (начало - прерывистые линии, конец - сплошные линии), при различных амплитудах стимула (плотностях тока), і - порог возбуждения покоящейся ткани; б) от амплитуды стимула (плотности тока), при разных размерах электрода.

Увеличение ширины фазы купирования при увеличении тока связано с хорошо известным в электрофизиологии электротоническим эффектом.

Для полноты отметим еще два случая - когда электрод перекрывает оба фронта. Численные эксперименты для этих

случаев также проводились. Если электрод перекрывает всю зону относительной рефрактерности, то реакция среды полностью аналогична реакции на стимуляцию всего возбудимого кольца, циркуляция прекращается (см. п.5.3.б). Если же перекрыта зона абсолютной рефрактерности, то одновременно имеем оба эффекта, присущие при перекрытии переднего или заднего фронтов по отдельности: 1) Передний фронт совершает скачок до передней кромки электрода, 2) Вблизи заднего фронта образуется зона возбуждения, которая формирует импульс, бегущий навстречу первоначальному. В этом случае циркуляция также прекращается.

Следовательно, с точки зрения расположения электрода главным является перекрытие заднего фронта.

в) Результаты двумерных численных экспериментов.

Эффект исчезновения ревербератора в результате локализованного стимула есть и в двумерном случае. Однако здесь возникает новое обстоятельство: весьма существенным оказывается еще и расположение ревербератора относительно границ. В частности, в неограниченной среде локализованный стимул никогда не приводит к ликвидации ревербератора.

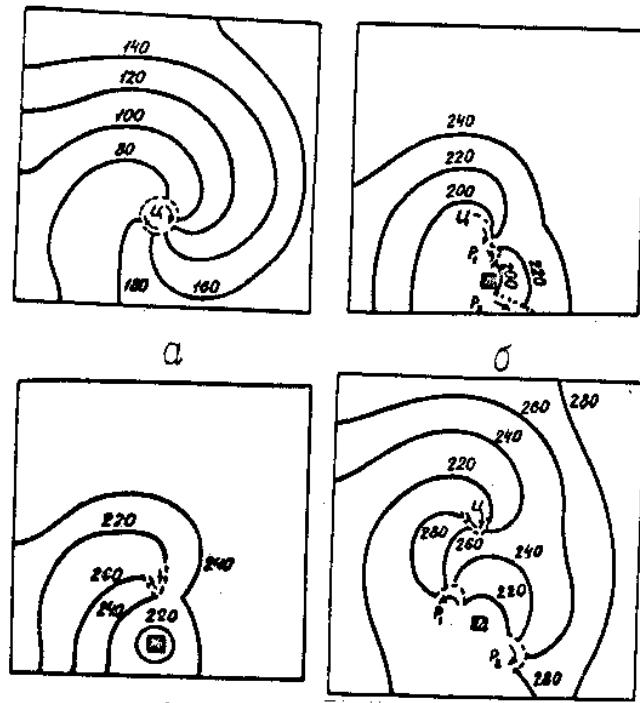
Вкратце необходимое условие возможность ликвидации ревербератора сводится к тому, что расстояние от его ядра до ближайшей точки границы среды должно быть не слишком большим по сравнению с диаметром ядра.

В этом случае удается достичь уничтожения ревербератора путем надлежащего подбора всех параметров стимула: размера электрода, его положения, амплитуды и времени нанесения. На рис. 5.2.3(б) изображены положения фронта волны возбуждения в различные моменты времени (изохронные карты),

соответствующие удачному подбору всех параметров.

Образование в результате стимуляции разрывов (полукольцевой волны) является необходимым условием для ликвидации ревербератора. Это условие - аналог одномерного условия возникновения одной волны. Диапазон значений параметров, при которых это возможно, определяется закономерностями, вполне аналогичными рис. 5.2.2. Момент стимуляции, как и в одномерном случае, должен приходиться на начало фазы относительной рефрактерности.

Рис. 5.2.3. ВАРИАНТЫ ВОЗДЕЙСТВИЯ ЛОКАЛИЗОВАННОГО ИМПУЛЬСА на ревербератор. Сплошные линии - изохроны переднего фронта волны возбуждения, цифры - время от начала эксперимента (в шагах), прерывистые линии и стрелки - движение обрыва переднего фронта, черный квадрат - положение стимулирующего электрода. а) Типичная изохронная карта ревербератора. б) Успешное уничтожение ревербератора: изохрона 240 не содержит разрывов. в) Ревербератор не уничтожен, стимул подан слишком поздно: изохрона 260 имеет разрыв. г) Осложнение: ревербератор "Ц" слишком далеко от границы, рождаются новые ревербераторы "Р₁" и "Р₂".



Если стимул подан слишком поздно, то в результате стимуляции возникает кольцевая волна, рис. 5.2.3(в). Она разрывается при приближении к ядру ревербератора. Один из разрывов сразу же сливается с разрывом фронта ревербератора, а другой разрыв остается нескомпенсированным. Из этого

последнего образуется новый ревербератор, который лишь немного смещен относительно старого.

Важно также и положение электрода. Оно должно быть выбрано с учетом требования близости одновременно и к ядру ревербератора, и к границе среды, самое выгодное расположение - между ядром и границей, в наиболее "узком" месте. В противном случае стимуляция не приводит к успеху: циркуляция сохраняется, а иногда возможны осложнения - рождение новых ревербераторов. Рис. 5.2.3(г) поясняет, почему нельзя уничтожить ревербератор, если он находится далеко от границы. Стимулирующий электрод довольно большого размера помещен приблизительно посередине между ядром ревербератора и границей, импульс нанесен в фазу "купирования". Как и на рис. (б), рождается пара разрывов, один из которых движется в направлении ведущего ядра ревербератора, а другой - к границе. Однако, так как расстояния велики, аннигиляции не происходит, а вместо этого закручиваются новые ревербераторы. Приближение электрода к границе или к ядру не спасает: в первом случае можно добиться, чтобы P_1 погиб на границе, но тогда останутся нескомпенсированными ревербераторы Γ и P_2 , и наоборот. Если размер электрода мал (меньше диаметра ядра), то рождения новых ревербераторов не происходит, т.к. вновь образованные близко друг к другу разрывы аннигилируют между собой.

Итак, перечислим возможные исходы и их условия:

1. Остается один ревербератор, смещенный относительно первоначального: амплитуда стимула мала, либо стимул подан не в фазу купирования, либо близко к ядру и далеко от границы, либо далеко и от ядра и от границы, но слишком

маленьким электродом.

2. Остается два противоположно вращающихся ревербератора: стимул подан близко к границе, но далеко от ядра.

3. Остается три ревербератора (два с направлением первоначального ревербератора и один - с противоположным): стимул подан далеко от границы и от ядра, достаточно большим электродом.

4. Не остается ни одного ревербератора: стимул подан в фазу купирования, близко к границе и близко к ядру.

Аналогичные закономерности имеют место при воздействии локализованного стимула на волну, циркулирующую вокруг невозбудимого препятствия. Новый эффект возникает, если место и время стимуляции выбраны удачно во всех отношениях, кроме одного: слишком далеко от границы. Если для ревербератора такая стимуляция приводит лишь к сдвигу ядра ревербератора, то в данном случае мы имеем качественное изменение ситуации: новая циркуляция представляет собой ревербератор, она "снята" с невозбудимого препятствия.

В случае, когда в двумерной возбудимой среде циркулируют два ревербератора в противоположных направлениях, иногда также можно их уничтожить при помощи одного локализованного стимула. Необходимое условие здесь - нужно, чтобы их ядра находились недалеко друг от друга. Правильное расположение электрода в таком случае - посередине между ядрами.

г) Обсуждение.

Полученные результаты показывают, что данный метод снятия аритмий применим только при следующих условиях:

1. Момент нанесения стимула должен быть выбран вблизи момента прихода заднего фронта циркулирующего импульса к

стимулирующему электроду.

2. Амплитуда стимулирующего импульса должна быть больше некоторого порога, однако слишком большое увеличение не дает дополнительных преимуществ (зависимость с насыщением).

3. Размеры стимулирующего электрода должны быть достаточно большими, однако не больше, чем размер ядра ревербератора - в противном случае возможны осложнения.

4. Электрод должен быть расположен достаточно близко к ядру ревербератора, на расстоянии порядка его размера.

5. Кроме того, электрод должен быть расположен достаточно близко к границе возбудимой ткани.

Условия 4 и 5 накладывают ограничение на расположение ревербератора - метод не применим, если ядро ревербератора удалено от границы больше чем на два диаметра ядра.

Если источником тахикардии является пара ревербераторов, то вместо условий 4 и 5 появляется условие одновременной близости электрода к обоим ядрам. Расстояние до границы не играет роли, однако вместо него появляется условие близости ядер ревербераторов друг к другу.

Эффект снятия циркуляции с анатомического препятствия с точки зрения практического приложения имеет два аспекта. Это осложнение: ревербератор имеет большую частоту, чем волна, циркулирующая вокруг препятствия, а чем более высокочастотна тахикардия, тем сложнее ее снять методом электростимуляции, и тем больше опасность возникновения фибрилляции. С другой стороны, сердечная ткань неоднородна, а в неоднородной ткани ревербератор может дрефовать. В результате этого он может погибнуть на границе, и тахикардия через некоторое время самопроизвольно прекратится.

Общий итог: при использовании одиночного стимула для прекращения аритмии важно как можно точнее знать локализацию путей риэнтри, их взаимное расположение и расстояние до границ. Без такой информации данный метод может оказаться не только бесполезным, но и приводить к осложнениям. Необходимость использования электрофизиологического картирования определяет сравнительно малую область применимости методов стимуляции.

5.3. Эволюция ревербератора под влиянием делокализованного воздействия.

а) Общие замечания.

В предыдущем разделе мы рассмотрели эволюцию ревербератора под влиянием однократного локализованного стимула с точки зрения практического приложения для борьбы с пароксизмальной тахикардией. Мы видели, что эффективность такого способа ограничена довольно сильными условиями.

Возможны различные развития метода электростимуляции. Один из путей - применение не однократной, а периодической высокочастотной стимуляции на основе эффекта вынужденного дрейфа [Krinsky, Agladze, 1983].

Другой путь - возбуждение всей ткани ("дефибрилляция") давно известен и является эффективным средством борьбы не только с аритмиями, но и с фибрилляцией. Этот способ, однако, обладает рядом недостатков - большим повреждающим воздействием на ткань, большой требуемой энергией электрического импульса и в связи с этим громоздкостью используемой аппаратурой. Эти и другие недостатки побуждают исследовать другие способы воздействия на ревербераторы.

Давыдов и др. [1988] на модели редких волн и большого ядра показали, что периодическое изменение свойств среды может приводить к направленному дрейфу ревербератора, если период изменения совпадает с периодом вращения самого ревербератора. При этом амплитуда изменений свойств среды может быть сколь угодно малой: при уменьшении амплитуды уменьшается скорость дрейфа, но сам факт дрейфа остается.

Можно думать, что этот эффект не является уникальным, но есть непосредственное следствие инвариантности модельных уравнений относительно сдвигов во времени и в пространстве и основных свойств ревербератора. От конкретной среды может зависеть только скорость движения ревербератора при конкретном периодическом воздействии, направление при данном соотношении фаз и т.п. Так как периодическое внешнее воздействие математически эквивалентно некоторому периодическому изменению свойств среды, то резонансный дрейф ревербератора может быть претендентом на то, чтобы применяться для борьбы с ревербератором в сердце: при направленном дрейфе он рано или поздно дойдет до границы возбудимой ткани и погибнет.

В связи с этим возникает потребность более подробно исследовать реакцию ревербератора (или системы ревербераторов, т.е. фибриллирующей ткани) на делокализованную стимуляцию.

б) Одномерная аналогия.

Прежде чем приступить к анализу двумерных эффектов, как и в п. 5.1, были проведены численные эксперименты с одномерным кольцом, по которому циркулирует волна возбуждения. Можно думать, что такая модель может правильно описывать анатомически определенное риэнтри.

Численные эксперименты показывают, что в любом случае

сразу же после "разряда" происходит скачкообразное перемещение вперед переднего фронта волны возбуждения - тем большее, чем выше амплитуда стимула. Дальнейшая эволюция, однако, радикально отличается при разных амплитудах стимула. При не слишком большой амплитуде циркуляция продолжается, воздействие оказывается лишь в замедлении движения переднего фронта в начальный промежуток времени и в изменении начальной фазы циркуляции.

Однако при увеличении амплитуды стимула скачок переднего фронта импульса становится все больше, и замедление последующего за ним движения переднего фронта становится все заметнее, пока не оказывается, что фронт после скачка начинает двигаться в обратную сторону. Результатом является "вымирание" волны возбуждения: передний фронт движется навстречу заднему, пока они не встретятся, и вся среда не перейдет в состояние покоя. При еще большей амплитуде это "вымирание" происходит почти одновременно для всей вновь возбужденной области, и поэтому "обращенное" движение переднего фронта не заметно.

По-видимому, описанный эффект является самой грубой моделью дефибрилляции. Заметим, что для такой "дефибрилляции" вовсе не требуется, чтобы электрический разряд возбуждал все относительно рефрактерные участки.

Какая часть области относительной рефрактерности должна быть возбуждена, легко увидеть для релаксационного варианта уравнений ФитцХью-Нагумо (5.1.1), $\epsilon \ll 1$. Движение переднего фронта волны возбуждения в этой модели определяется значением медленной переменной в той точке, где находится этот фронт. Если это значение оказывается большим некоторого

критического, то движение фронта будет происходить в сторону возбужденной области.

Таким образом, условием "дефибрилляции" на одномерном кольце в этой модели является возбуждение всех точек, в которых значение медленной переменной упало ниже критического.

Нетрудно видеть, что необходимая амплитуда стимула, определяемая из этого критерия, зависит лишь от свойств нелинейной функции в быстром уравнении и не зависит, в частности, от длины возбудимого кольца. В случае, когда нет условия диспропорции времен, это, вообще говоря, будет не так.
в) Воздействие одиночного стимула на одиночный ревербератор.

Аналогично одномерному случаю, воздействие электрического разряда сводится к возбуждению некоторой части относительно рефрактерных участков, и, скачку переднего фронта волны возбуждения. При амплитудах выше критической наблюдается схлопывание возбужденной зоны и переход среды в состояние покоя (дефибрилляция), а при амплитудах ниже критической - возобновление циркуляции. Критическая амплитуда стимула близка к определенной из одномерных экспериментов.

Новый эффект заключается в том, что при амплитудах ниже критической в результате стимуляции кроме изменения фазы вращения (сдвига во времени) происходит и смещение ядра ревербератора (сдвиг в пространстве).

Механизм сдвига можно видеть на рис. 5.3.1. В результате скачка волна возбуждения опередила естественное развитие событий, поэтому некоторое время она движется по более рефрактерным участкам ткани, ее движение ограничивается зоной абсолютной рефрактерности. После этого

циркуляция возобновляется уже на новом месте.

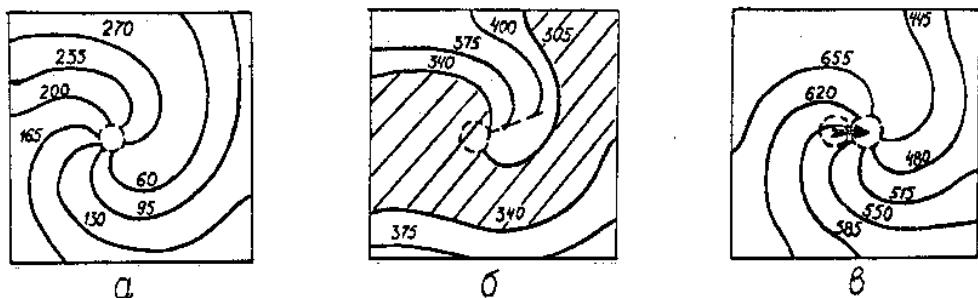


Рис. 5.3.1. СДВИГ ЯДРА ревербератора в результате делокализованного стимула. а: изохронная карта исходного ревербератора. б: Скачок переднего фронта в результате стимула между изохронами 305 и 340 заштрихован, пунктиром показано старое положение ядра. в) Циркуляция возобновилась на новом месте, сдвиг ядра показан стрелкой.

Величина сдвига, естественно, зависит от амплитуды стимула. Оказалось, что при изменении параметров в широких пределах (конкретно, изменялся параметр g_f) основные черты остаются неизменными. При амплитуде стимула, равной порогу возбуждения покоящейся ткани, величина смещения ядра по порядку величины соответствует его размеру. При приближении к порогу дефибрилляции смещение увеличивается все быстрее, пока не превысит размер среды.

г) Воздействие одиночного стимула на ансамбль ревербераторов ("дефибрилляция").

Пусть теперь вращается одновременно несколько ревербераторов. Пусть на такую "фибрилирующую" среду подан делокализованный стимул. Можно ожидать, что при амплитуде стимула выше "порога дефибрилляции" волна возбуждения каждого из ревербераторов будет вымирать, а при меньших будет изменяться их положение. Если ревербераторов много, то часть из них будет выброшена на границу и исчезнет, а часть анигилирует друг с другом. Число оставшихся ревербераторов

будет убывать с увеличением амплитуды разряда.

Эти предположения подтвердились численными экспериментами. На рис. 5.3.2 амплитуда разряда составляла около 70% от порога дефибрилляции. До разряда в среде циркулировали восемнадцать ревербераторов, после разряда осталось восемь, остальные погибли по описанному выше механизму.

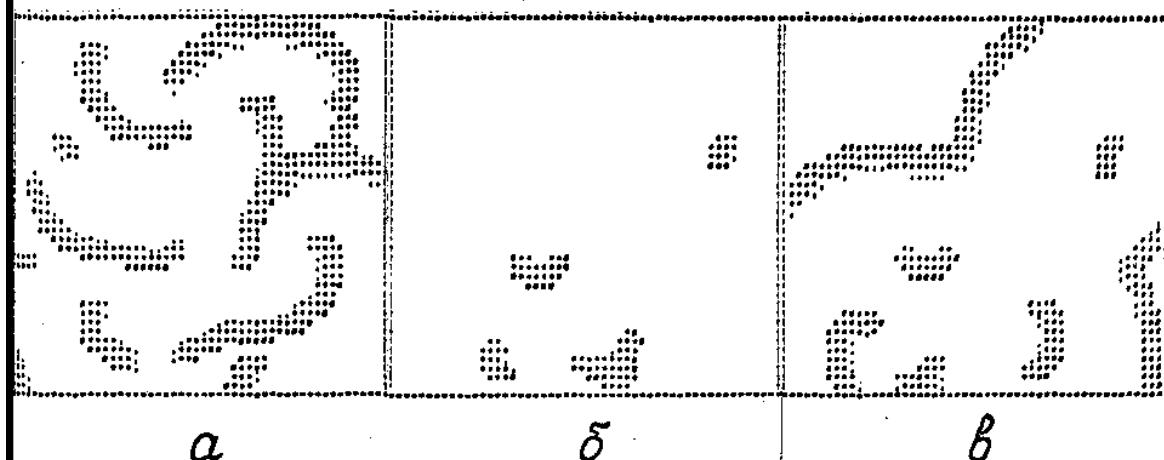


Рис. 5.3.2. "ЧАСТИЧНАЯ ДЕФИБРИЛЛЯЦИЯ" в результате делокализованного стимула амплитудой ниже стандартного порога. Темным местам соответствуют возбужденные области. а: исходная картина "фибрилляции". б, в: после нанесения стимула часть ревербераторов погибла на границе или аннигилировала.

Полученные результаты интересно сопоставить с результатами разд. 5.2. Там было указано, что для успеха локализованной стимуляции наряду с амплитудой стимула определяющую роль играют достаточно большой размер электрода и правильный выбор его положения и момента стимуляции.

Применение делокализованного разряда снимает проблемы выбора положения электрода (так как разряд проходит по всем участкам ткани) и обеспечения достаточно большого его размера (так как делокализованная стимуляция эквивалентна использованию электрода с размерами, равными размерам всей ткани).

При амплитуде делокализованного разряда ниже порога дефибрилляции актуальным остается выбор момента времени, в который производится разряд: при стимуляции в другой момент в таком же эксперименте, как на рис. 5.3.2, число "выживших" ревербераторов может быть иным, и они могут образовываться в других местах.

При такой амплитуде имеется прямая аналогия с сформулированным в разд. 5.2 необходимым условием, чтобы расстояние от ревербератора до ближайшего невозбудимого участка не превышало размера ядра.

А именно, в случае делокализованной стимуляции также уничтожаются только ревербераторы, расположенные достаточно близко к границе; причем критическое расстояние при амплитуде стимула, равной порогу возбуждения покоящейся ткани, как раз примерно соответствует размеру ядра ревербератора.

д) Воздействие многократной стимуляции на ревербератор.

Задачей следующей серии экспериментов было исследование эффекта резонансного дрейфа ревербератора.

Результаты исследований на средах большого размера качественно совпали с предсказаниями Давыдова и др. [1988].

Сохраняется количественная закономерность, выявленная в п. 5.3.в - при амплитуде, соответствующей порогу возбуждения покоящейся ткани, на каждый стимул происходит сдвиг приблизительно на размер ядра.

Был обнаружен и новый эффект (рис. 5.3.3). Ревербератор, дрейфуя по прямой линии при резонансной частоте стимуляции, при подходе к границе среды изменяет направление своего движения и этим избегает столкновения с границей (а). Этот эффект проявлялся при не слишком больших

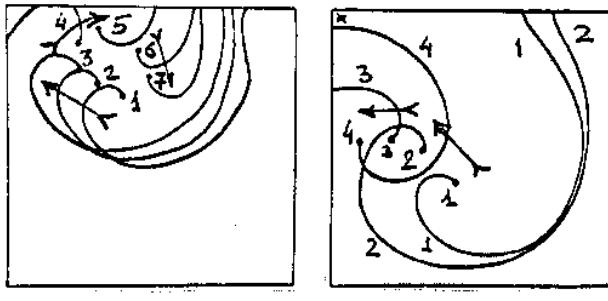
III

амплитудах стимула. При достаточно больших амплитудах ревербератор все-таки приближается к границе и погибает, хотя при этом движении его путь может несколько искривляться.

Простейшее объяснение этого эффекта состоит в следующем. Направление дрейфа ревербератора в резонансном поле зависит от соотношения фаз ревербератора и поля. Но одним из следствий взаимодействия ревербератора с границами возбудимой среды является изменение его частоты. При тех значениях параметров, при которых проводилась описываемая серия расчетов, этот эффект гораздо сильнее дрейфа в результате взаимодействия [Е.А.Ермакова, частное сообщение].

Рис. 5.3.3. РЕЗОНАНСНЫЙ ДРЕИФ ВБЛИЗИ ГРАНИЦЫ.

Изображены изохроны переднего фронта в моменты через 2 периода стимуляции. Концы изохрон помечены точками и пронумерованы. Стрелки - направление дрейфа. а: ОТРАЖЕНИЕ при постоянной частоте стимуляции, б: отсутствие отражения и ГИБЕЛЬ при наличии обратной связи, изохrona №4 - последняя. Крестиком указано положение электрода обратной связи.



а

б

Нетрудно видеть, что взаимодействие этих двух эффектов вполне может привести к картине на рис. 5.3.3(а). В самом деле, малое изменение частоты ревербератора может быть рассмотрено как медленное изменение его фазы во времени, и, следовательно, и изменение разности фаз ревербератора и внешнего поля. Но такое изменение фаз приводит к изменению направления дрейфа, что и требовалось показать (см. также Дополнение к этому пункту).

С точки зрения использования периодической делокализованной стимуляции как метода борьбы с аритмиями эффект отражения от границы означает неудачу: ревербератор не уничтожается, либо опять требуются большие амплитуды.

Однако приведенное объяснение эффекта диктует и метод борьбы с ним. Коль скоро фаза ревербератора "плывет", то сохранить разность между ревербератором и стимуляцией можно, заставив фазу стимуляции "плыть" синхронно с фазой ревербератора. Практически это может быть достигнуто при помощи обратной связи: достаточно посыпать стимулирующие импульсы не с фиксированной частотой, а синхронно с приходом волны возбуждения в какую-либо выбранную точку.

Естественно, при этом амплитуда стимуляции должна быть не слишком большой, либо должна быть тщательно выбрана величина задержки, иначе в результате обратной связи могут возникнуть автоколебания в системе "стимулирующий электрод - регистрирующий электрод".

Описанный метод был апробирован численным экспериментом, см. рис. 5.3.3(б). При тех же параметрах среды и амплитуде стимула, при которых наблюдалось отражение, после замены периодической стимуляции на синхронизованную удается вытолкнуть ревербератор на границу и уничтожить.

е) Обсуждение.

Указанная интерпретация эффекта делокализованной стимуляции ниже порога дефибрилляции может объяснять эффект изменения характера фибрилляции после нанесения недостаточно сильного импульса, известный в клинической кардиологии [Гурвич 1975], как "частичную дефибрилляцию".

Проведенные численные эксперименты не дают указаний на

возможность снижения порога дефибрилляции при повторных раздражениях через времена порядка 1 сек, которое также наблюдается в электрофизиологических экспериментах.

Возможно, такой эффект появится при учете неоднородностей ткани. Гипотетический механизм: в неоднородной ткани порог дефибрилляции различен для разных участков, и, следовательно, для разных ревербераторов. Если разряд больше минимального, но меньше максимального из этих порогов, то "слабые" ревербераторы уничтожаются, а наиболее "крепкие" только сдвигаются. Поскольку они сдвигаются в область с меньшим порогом дефибрилляции (ведь сами они находились в областях с максимальным), то общий порог падает на то время, пока опять не появятся ревербераторы в опасных зонах.

Зато проведенные численные эксперименты подсказывают, что один из возможных путей существенного уменьшения повреждающего действия дефибрилляции может заключаться в применении высокочастотной (равной частоте ревербератора) делокализованной стимуляции.

Трудность, которая, очевидно, возникнет при применении этого метода – это изменение направления дрейфа в результате изменения частоты. Естественным и универсальным методом борьбы с этим является устройство обратной связи для синхронизации стимуляции с циркуляцией в сердечной ткани. Один из способов синхронизации – генерация стимула в зависимости от прихода волны возбуждения к регистрирующему электроду.

Другая возможная трудность – необходимость одновременного обеспечения достаточно высоких амплитуды и частоты стимуляции. Один из возможных путей преодоления

может заключаться в том, чтобы генерировать стимул не на каждый приход волны возбуждения, а лишь на каждый второй (или третий, и т.д.).

Возможно, этот метод окажется полезным для создания встроенных дефибрилляторов. Главные его преимущества - малое повреждающее действие и возможность применения низковольтного оборудования. Принципиальное ограничение по сравнению с классическим методом: предлагаемый метод воздействует только на функционально определенное риэнтри. Однако в предыдущем разделе мы видели, что воздействие хотя и довольно сильного, но локального стимула может уничтожить анатомически определенное риэнтри или по крайней мере превратить его в функциональное. Возможно, в некоторых случаях есть определенный смысл комбинировать эти два метода.

ДОПОЛНЕНИЕ. Феноменологическая модель резонансного дрейфа взаимодействующего ревербератора.

Предположим, что как амплитуда воздействия, так и степень неоднородности и взаимодействие с границами малы. Тогда естественно предположить, что все эти эффекты аддитивны, так что результирующая скорость дрейфа есть векторная сумма скоростей дрейфа в результате каждой из причин. Строгое обоснование такого "принципа суперпозиции" выходит за рамки данной работы; здесь мы ограничимся лишь феноменологическим анализом. Если частота внешнего воздействия $\Omega_{возд.}$ фиксирована, то мы приходим к следующей феноменологической системе:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \delta\Omega(x, y) \quad (5.3.1)$$

$$\frac{dx}{dt} = v(x, y) \cos \varphi + C_x(x, y) \quad (5.3.2)$$

$$\frac{dy}{dt} = v(x, y) \sin \varphi + C_y(x, y) \quad (5.3.3)$$

Здесь φ - угол, задающий направление дрейфа вихря и определяемый рассогласованием по фазе между вихрем и внешним воздействием; x, y - координаты центра вращения вихря, $\delta\Omega(x,y) = \Omega_{\text{соб.}}(x,y) - \Omega_{\text{возд.}}$ - рассогласование частот, $v(x,y)$ - абсолютное значение скорости дрейфа в результате внешнего воздействия, $C_x(x,y), C_y(x,y)$ - компоненты скорости дрейфа в результате неоднородности и взаимодействия с границами.

Уравнение (5.3.1) есть формальная запись утверждения, что направление дрейфа определяется разностью фаз между вихрем и внешним воздействием. Уравнения (5.3.2), (5.3.3) выражают принцип суперпозиции: первые члены - скорость дрейфа в результате внешнего воздействия, вторые члены - в результате взаимодействия с неоднородностью или с границами.

Здесь не учтены эффекты, связанные с анизотропностью, всегда присущей неоднородной среде. Для их учета следовало бы считать, что v зависит не только от x, y , но и от φ .

Для грубого анализа свойств системы (5.3.1)-(5.3.3) пренебрежем C_x, C_y по сравнению с v (это всегда правомерно, когда амплитуда стимула достаточно велика), и положим, что скорость дрейфа v во всех местах среды одинакова $v(x,y)=\text{const}$. Исключая φ , получим систему,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\delta\Omega(x,y) \frac{dy}{dt}, \quad (5.3.4)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \delta\Omega(x,y) \frac{dx}{dt}, \quad (5.3.5)$$

совпадающую с системой уравнений для заряженной частицы в магнитном поле, перпендикулярном плоскости движения; роль магнитного поля играет $\delta\Omega(x,y)$. При отсутствии неоднородности и взаимодействия с границами, $\delta\Omega(x,y)=\text{const}$, имеем "ларморовский" дрейф, описанный Давыдовым с соавт. [1987].

Для простейшего анализа применимости резонансного дрейфа для борьбы с вихрями, будем считать, что среда однородна, а $\delta\Omega(x,y)$ обусловлена взаимодействием с границей. Пусть граница - это прямая $x=0$, и вихрь находится слева от нее: $x < x_0 < 0$. Влияние границы экспоненциально затухает с удалением от нее (гл. 3). Пусть вдали от границы имеет место точный резонанс. Положим для оценки

$$\delta\Omega(x,y) = a \exp(-|x|/R) \quad (5.3.6)$$

где R - характерный радиус взаимодействия. В этом случае система (5.3.1)-(5.3.3) может быть явно проинтегрирована. Исключая x из (5.3.1) при помощи (5.3.2), получим

$$R \frac{d^2\varphi}{dt^2} = v \cos \varphi \frac{d\varphi}{dt}, \quad (5.3.7)$$

откуда

$$v t = R \int d\varphi / (\sin \varphi - \sin \varphi_0). \quad (5.3.8)$$

Здесь мы предположили, что вихрь "прилетел" из бесконечности под углом φ_0 . Видно, что $t \rightarrow \pm\infty$ при $\sin(\varphi) \rightarrow \sin(\varphi_0)$. Это означает, что вихрь "отражается" от границы, причем угол падения равен углу отражения:

$$\varphi_0 = \varphi(t=-\infty) = \pi - \varphi(t=\infty) \quad (5.3.9)$$

Дальнейший анализ показывает, что при учете слагаемых C_x , C_y (дрейфа от взаимодействия) при разумных предположениях, отражение по-прежнему имеет место. Например, это можно гарантировать если $\delta\Omega$ и C_x не зависят от y , непрерывны, не меняют знака, и стремятся к нулю при удалении от границы. Закон (5.3.9), однако, при этом нарушается.

Глава 6. ЧИСЛЕННЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ ПО ЭВОЛЮЦИИ СВИТКОВ.

6.1. О постановке численных экспериментов.

Новое обстоятельство по сравнению с двумерными экспериментами – относительная сложность анализа результатов. Положение облегчается тем, что для качественного понимания, как правило, достаточно анализ динамики линий особенностей – нитей вихрей или дислокаций.

Традиционный подход заключается в том, что выделяются точки, в которых за время одного или нескольких оборотов переменная и не превысила некоторой заданной величины [Перцов, Панфилов 1981, Nandapurkar, Winfree 1987]. В континуальной среде такое определение дает в качестве "ответа" целые области ("толстая" нить). Этот метод использовался в экспериментах по динамике нити с отрицательным натяжением (разд. 6.4).

Автором предложен новый метод, основанный на непосредственном выделении топологических особенностей поля (u, v) ("тонкая" нить). Отличие нового метода состоит в том, что он позволяет выделять "мгновенные" особенности, не нужно накапливать информацию за период. В ряде случаев это позволяет несколько экономить машинное время, и, что более важно, новый метод применим и в случаях "бурной" эволюции, когда традиционный метод не дает результатов – например, при анализе вынужденного дрейфа.

Метод заключается в следующем. Все возможные состояния автоворонковой среды в точке условно подразделяются на три класса, так что на фазовой плоскости получаются три области, имеющие одну общую граничную точку. Можно считать, например, что эти три класса состояний соответствуют грубой

классификации состояний возбудимых элементов, принятой в физиологии: возбужденное, рефрактерное и ждущее состояния. Границам между состояниями в трехмерной среде соответствуют поверхности. Например, поверхность раздела между ждущими и возбужденными состояниями естественно назвать передним фронтом волны, а между возбужденными и рефрактерными (или между рефрактерными и ждущими) - задним. Тогда точке на фазовой плоскости, граничной ко всем трем типам состояний, отвечает линия (линии) в трехмерной среде. Эти линии мы и назовем линиями особенностей. В вышеприведенной интерпретации эти линии являются границей между передним и задним фронтом, поэтому такое определение и может служить определением нити вихря.

Недостаток метода заключается в том, что при таких больших шагах по пространству требуется аккуратное деление пространства состояний на классы, иначе возникают артефакты. Положение "тонкой нити" осциллирует со временем - при надлежащем подборе параметров условно можно говорить, что она в течение периода описывает границу "толстой нити".

6.2. Приповерхностная стимуляция.

а) Постановка задачи.

В работах [Krinsky, Agladze 1983, Ермакова и др. 1986] описано явление вынужденного дрейфа ревербератора под воздействием падающих извне плоских волн или локализованной высокочастотной стимуляции. Предполагается, что этот эффект может иметь клинические приложения: также как и в случае резонансного дрейфа, ревербератор может выйти на границу и погибнуть. Но возбудимая ткань сердца больших животных и в

том числе человека существенно трехмерна.

Естественно ожидать, что эволюция автоволнового вихря в аналогичных условиях в трехмерной среде может иметь качественно новые особенности. Поведение вихря, очевидно, должно зависеть от взаимной ориентации волн от стимулятора и вихря. Если направление движения "внешних" волн перпендикулярно нити вихря, тогда поведение будет вполне аналогичным двумерному случаю.

Радикально отличается от этого случая ситуация, когда плоские волны направлены вдоль оси вихря (рис. 6.2.1). Такая ситуация уже существенно трехмерна. Этот случай и исследуется в данном разделе.

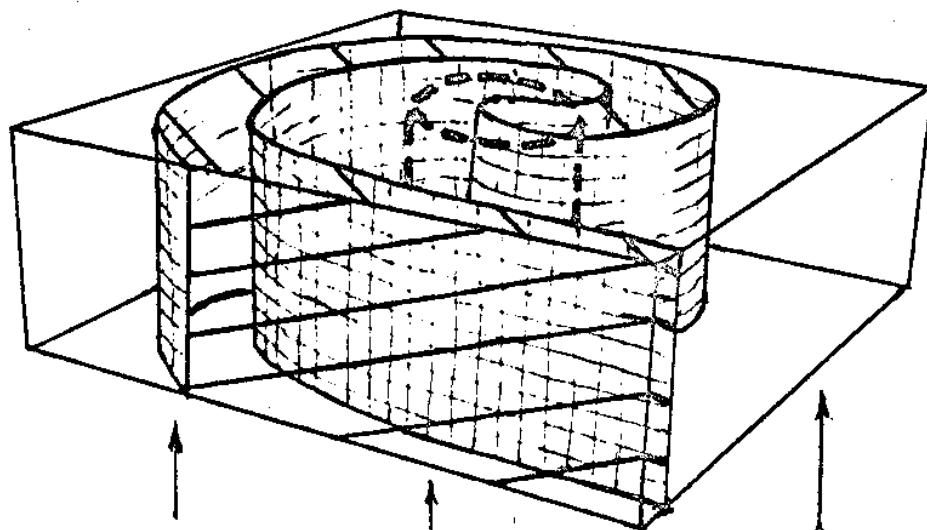


Рис. 6.2.1. СХЕМА ЧИСЛЕННОГО ЭКСПЕРИМЕНТА. Сплошными тонкими линиями изображена поверхность уровня $U=0.5$ вихря перед началом стимуляции. Косой штриховкой помечены области на поверхности среды, в которых $U>0.5$. Стимуляция производится по нижней грани (указано стрелками). Пунктиром показан цилиндр, для поверхности которого проводится двумерная аналогия (см. рис. 6.2.2).

б) Двумерная аналогия.

Процессы, происходящие при стимуляции свитка окажутся более понятными, если привлечь разумную двумерную аналогию.

А именно, рассмотрим автоволновую среду на цилиндрической поверхности. Пусть по ней циркулирует плоская волна, фронт которой параллелен образующим цилиндра. Затем по одному из краев цилиндра осуществляется периодическая стимуляция. Легко себе представить, что получающаяся картина будет аналогична той, которая наблюдается в цилиндрическом сечении трехмерной среды (такой цилиндр обозначено на рис. 6.2.1 пунктиром). С другой стороны, происходящие процессы вполне аналогичны явлению вынужденного дрейфа на плоской среде.

Результаты двумерных расчетов для среды на цилиндре изображены на рис. 6.2.2. На циркулировавшую волну нанесен внешний стимул по нижнему краю цилиндра.

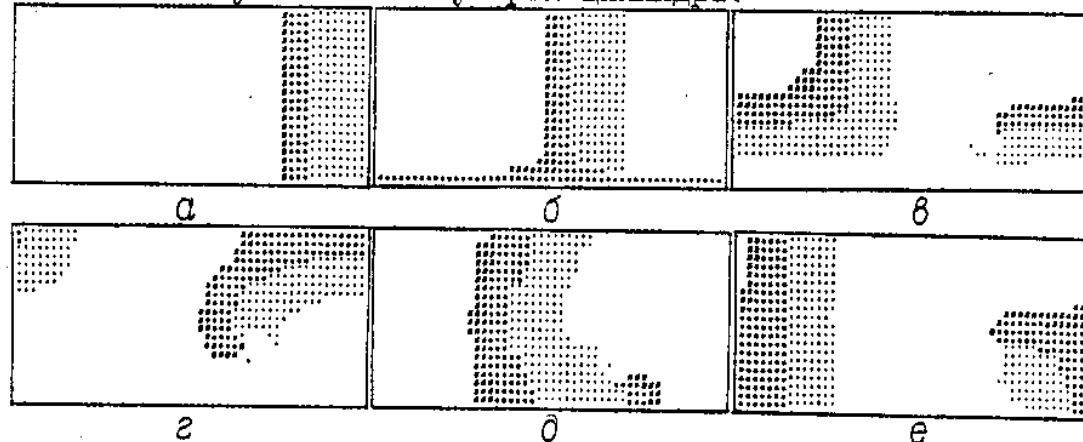


Рис. 6.2.2 ДВУМЕРНАЯ АНАЛОГИЯ: ЦИЛИНДРИЧЕСКАЯ СРЕДА. Изображены положения волны возбуждения приблизительно через $1/3$ периода вихря. Наиболее темные области соответствуют переднему фронту, более светлые - заднему. Левые и правый края среды "склеены". а: циркулирующая по цилинду плоская волна. б: подан стимул на нижний край цилиндра. в: вновь образовавшаяся волна рвется вблизи заднего фронта исходной волны и соединяется с ней передними фронтами. г-е: разрыв закручивается в вихрь (вращается против часовой стрелки).

Если амплитуда стимула достаточно велика (именно этот случай изображен), то некоторая зона вблизи всего стимулируемого края оказывается возбужденной. Один конец фронта новой

волны сливается с фронтом старой, так что оба фронта образуют единое целое. Вблизи заднего фронта циркулировавшей волны новая волна с некоторого момента не проходит, появляется обрыв переднего фронта. Если амплитуда стимула достаточно велика, то этот обрыв фронта образуется настолько глубоко внутри среды, что при отсутствии дальнейшей стимуляции служит "затравкой" для образования ревербератора.

Два слова о том, что на рис. 6.2.2 не изображено.

а) Если амплитуда стимула мала, то либо новая волна проникает внутрь среды не везде, либо возникающий ревербератор тут же гибнет из-за близости границы, так что фронт волны по прежнему будет выходить на оба края цилиндра. При отсутствии дальнейшей стимуляции фронт постепенно выпрямится, так что через большое время воздействие стимула скажется лишь на фазе циркулирующей волны.

б) В случае, если нанесен не один стимул, а целая периодическая серия с достаточно высокой частотой и амплитудой, то наблюдается вынужденный дрейф дислокации. Чем длиннее серия, тем на большей высоте по ее окончании возникнет ревербератор. При достаточно длинной серии дислокация погибнет на верхней границе, и по ее окончании среда перейдет в состояние покоя.

Таким образом, здесь наблюдается явление вынужденного дрейфа в чистом виде, отличие цилиндрической среды от области на плоскости практически никак не оказывается. Единственное обстоятельство, о котором стоит упомянуть: как и в случае плоскости, при установившейся картине вынужденного дрейфа на плоскости мы имеем не дрейфующий ревербератор, а дислокацию в поле плоских волн. На цилиндре

же волны выше дислокации несколько изогнутые и в целом скошенные - тем сильнее, чем меньше радиус цилиндра (скос обеспечивает одну длину волны за один оборот вокруг цилиндра).

в) Поведение фронтов.

На рис.6.2.3(а-в) изображена эволюция волны возбуждения в результате однократной стимуляции. Как и следовало ожидать, стимуляция достаточно высокой амплитуды обеспечивает перевод непосредственно прилегающей к стимулируемой грани области в возбужденное состояние.

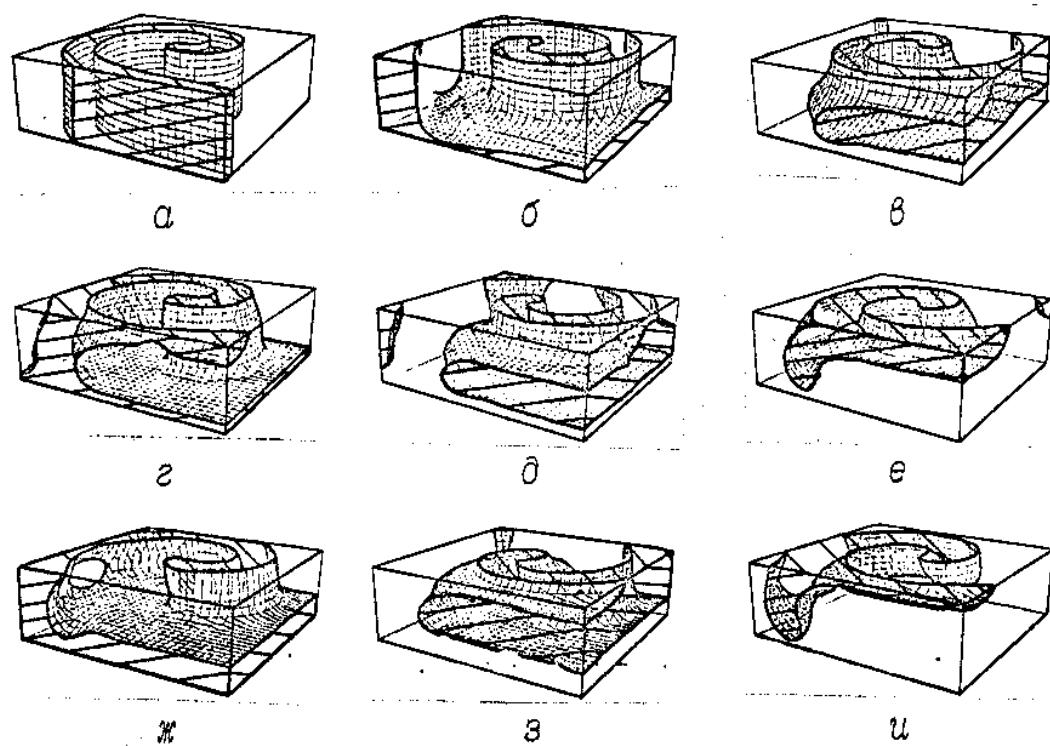


Рис. 6.2.3. ЭВОЛЮЦИЯ ВОЛНЫ ВОЗБУЖДЕНИЯ в результате первого (а-в) и двух последующих (г-и) импульсов. Изображены поверхности $u=0.5$ в моменты времени приблизительно через $1/3$ периода вихря. Вновь образовавшаяся в результате стимуляции волна образует одно целое с вихрем.

Дальнейшее прохождение волны возбуждения зависит от состояния среды в той или иной точке. Передний фронт волны,

прошедший в местах, находящихся в ждущем состоянии, непрерывно переходит в передний или задний фронты свитка. При этом на участках, находившихся на более поздней стадии рефрактерности, передний фронт новой волны продвигается заметно быстрее. При более низкой амплитуде стимула (на рис. не показано) новая волна проходит не везде, и фронты по-прежнему выходят на нижнюю грань. В таком случае внешнее воздействие приводит лишь к подкручиванию свитка.

В нашем же случае после начала стимуляции фронты касаются лишь боковых и верхней граней. На сильно рефрактерных участках внешняя волна не проходит дальше определенного предела. Эти участки возбуждаются уже позднее, когда к ним подойдет передний фронт свитка (здесь, конечно, разделение переднего фронта волны на часть, принадлежащую волне свитка, и часть, принадлежащую новой волне, условно, так как все фронты непрерывно переходят друг в друга). Таким образом обеспечивается несинхронность возбуждения в достаточно высоко лежащих слоях. Наоборот, слой, прилегающий к нижней грани, одновременно был переведен в возбужденное состояние, и затем практически одновременно переходит в ждущее состояние.

На рис. 6.2.3(г-и) изображена дальнейшая эволюция в результате нанесения второго и третьего импульсов. Видно, что все качественно повторяется, только уровень, на котором происходят "интересные" события (раздел между областями влияния свитка и плоских волн) смещается все дальше вверх. Выше этого уровня раздела в горизонтальных сечениях все еще наблюдается картина вращения ревербератора (см., например, на верхнюю грань), ниже ничего подобного не происходит.

При достаточно длинной серии стимулирующих импульсов

уровень раздела достигает верхней грани, так что на ней уже не наблюдается картина вращения ревербератора. В этом случае по окончании серии среда переходит в состояние покоя. Если же стимуляция прекратилась раньше, то циркуляция возобновится. О ее характере см. в разделе 6.4.

г) Поведение линии особенностей.

Из двумерной аналогии следовало бы, что в каждом цилиндре достаточно большого радиуса, ось которого совпадает с осью вращения свитка, будет наблюдаться нечто похожее на процессы, изображенные на рис. 6.2.2, а именно, в каждом таком сечении появится обрыв фронта, который при периодической стимуляции превратится в дислокацию в поле падающих волн, а после прекращения пакета падающих волн приведет к образованию ревербератора. В трехмерной среде такие точки образуют линию дислокации. Из соображений непрерывности линия дислокации должна непрерывно переходить в нить вихря. В ходе численного эксперимента линии особенностей было уделено особое внимание.

Поведение линии особенностей в процессе стимуляции изображено на рис. 6.2.4. После начала стимуляции недалеко от нижней грани возникает новый участок линии особенностей, расположенный горизонтально и повторяющий, как и следовало ожидать, спиральную форму заднего фронта циркулировавшей волны в момент начала стимуляции. В дальнейшем этот участок, существенно не изменяя своей формы, подвергается вынужденному дрейфу вверх. Если серия импульсов достаточно длинна, то линия особенностей доходит до верхней грани и исчезает. Этому моменту соответствует исчезновение картины вращающегося ревербератора на верхней грани.

Более тонкий эффект заключается в том, что "старый" участок линии особенностей, соответствующий нити вихря, также не остается без изменения, а изгибаются и немножко дрейфует. Кроме того, при внимательном рассмотрении можно заметить, что линия дислокации не лежит в одной плоскости, а дрейфует с разной скоростью на разных участках.

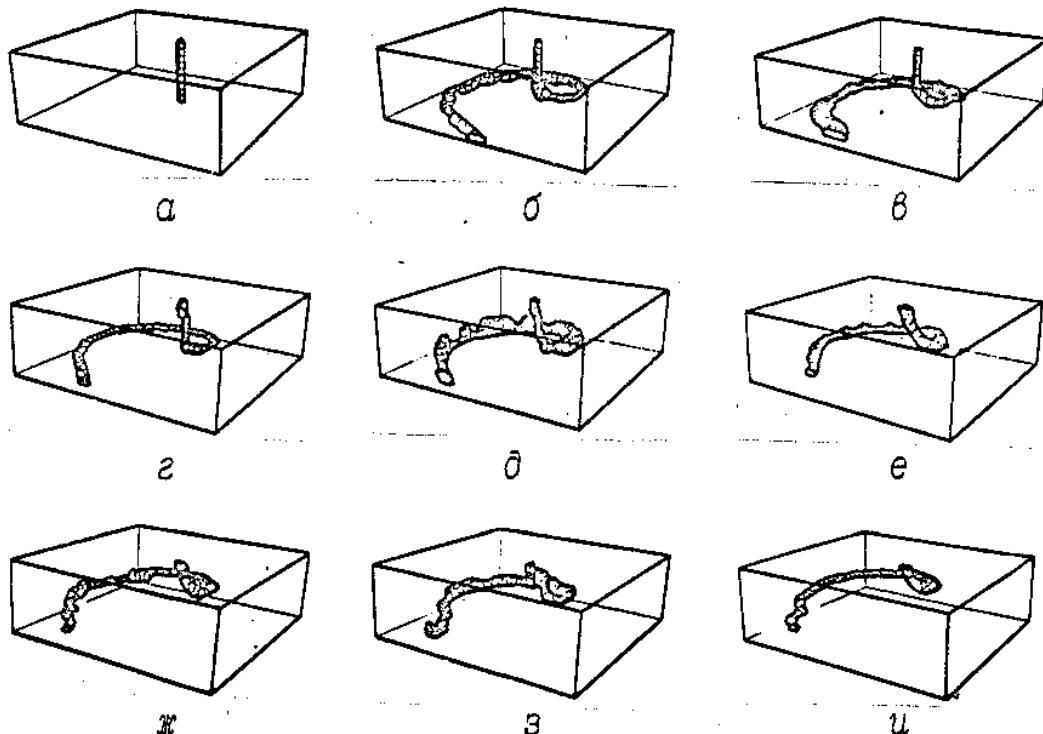


Рис. 6.2.4. ЭВОЛЮЦИЯ ЛИНИИ ОСОБЕННОСТЕЙ, МОМЕНТЫ ВРЕМЕНИ СООТВЕТСТВУЮТ РИС. 6.2.3. Первый ряд: в результате первого импульса рождается новый участок линии спиралеобразной формы вблизи стимулируемой грани и заднего фронта волны первоначального вихря. Второй и третий ряды: спиралеобразный участок испытывает вынужденный дрейф вверх и наружу под действием стимуляции; заметен, кроме того, эффект укорочения "вследствие кривизны".

"Правдоподобное объяснение" этим эффектам может быть следующим. Конечно, процесс вынужденного дрейфа сильно нелинейен в том смысле, что дислокация сильно отличается от ревербератора, и поэтому здесь нет оснований ожидать

выполнения принципа суперпозиции. Однако вспомним, что Ермаковой с соавт. [1986] предложена разумная теория вынужденного дрейфа, основанная на предположении о том, что в промежутке между перезамыканиями с волны на волну особенность (дислокация, обрыв фронта) движется по тому же закону, по которому движется кончик (обрыв фронта) ревербератора. Там это означало, что особенность движется по окружности с радиусом, равным радиусу ядра ревербератора. Если применить этот же принцип в трехмерном случае, то мы увидим, что часть времени линия особенностей должна двигаться по тому же закону, по которому движется "тонкая нить" свитка, и результирующее движение есть "суперпозиция" вынужденного дрейфа и автономного сжатия в духе разд. 4.2.

д) Обсуждение.

Описанное явление представляет интерес с точки зрения возможных приложений для борьбы с сердечными аритмиями. Условия описанных численных экспериментов будут выполняться, если стимуляции подвергать, например, приповерхностный слой возбудимой ткани. Результаты этих экспериментов позволяют предположить, что до тех пор, пока мы имеем дело с функционально определенными риэнтри, явление вынужденного дрейфа обеспечивает очищение возбудимой ткани, в том числе и существенно трехмерной. Поскольку законы трехмерного вынужденного дрейфа по существу совпадают с двумерными, то можно утверждать, что характерное время, необходимое для очищения всей среды, определяется отношением максимального расстояния, на которое должен быть осуществлен вынужденный дрейф, к его скорости.

Этим определяется первое преимущество метода

приповерхностной стимуляции по сравнению с локализованной стимуляцией. Если стимуляция производится локально, то время, необходимое для "очищения" всей среды от риэнтри, определяется "продольными" размерами сердца; если же приповерхностно - то лишь толщиной, которая заметно меньше.

Второе преимущество. Как известно, анатомически определенное риэнтри двумерному вынужденному дрейфу не подвержено. Если же блок проведения "перпендикулярен" к поверхности возбуждаемой ткани, то при приповерхностной стимуляции риэнтри тем не менее будет уничтожено.

До сих пор мы обошли молчанием одно принципиальное обстоятельство: мы не оговаривали, каким способом можно осуществить приповерхностную стимуляцию сердечной ткани. Для этого необходимо было бы определить, как расположены электроды, и т.п. Обратим внимание, что если просто использовать электроды большой площади, то мы получим возбуждение не приповерхностное, а по всей толщине. Это соответствует условиям, при которых проводились численные эксперименты разд. 5.3, только в трехмерном варианте, и в зависимости от амплитуды и количества стимулов мы получим "полную", "частичную" либо "постепенную" дефибрилляцию. При этом: во-первых, теряется то преимущество, что для приповерхностной стимуляции потребовалась бы меньшая энергия; и во-вторых, все это не имеет никакого отношения к явлениями, изучавшимся в настоящем разделе.

Одним из возможных способов осуществления приповерхностной стимуляции мог бы быть следующий. Электроды обоих знаков нужно расположить с одной стороны. При этом электродов должно быть много, и они должны чередоваться друг с другом.

Можно ожидать, что при таких условиях возбуждаться будет лишь ткань на глубину, по порядку величины не превышающую расстояния между электродами. При этом встает вопрос об оптимальной геометрии расположения электродов. Следующий раздел будет посвящен этому вопросу.

6.3. Локализованные воздействия на свиток.

а) Воздействие электродом-“щеткой”.

Первая мысль состоит в том, что это должны быть точечные электроды, расположенные в том или ином порядке.

Оказалось, что при не слишком малых расстояниях между такими электродами никаких качественных изменений линии особенностей в результате стимуляции не происходит. Если частота стимуляции не намного превосходит собственную частоту свитка, то устанавливается периодический режим с периодом стимуляции. Если же частота увеличивается, то периодический режим срывается. Это происходит вблизи максимальной частоты плоских волн в данной среде и связано, по-видимому, с эффектом трансформации ритма.

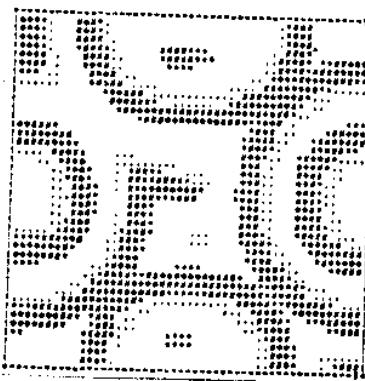
Причину того, почему такая стимуляция не приводит к рождению новых участков линии особенностей, можно увидеть на двумерной иллюстрации, приведенной на рис. 6.3.1. Эта иллюстрация качественно соответствует тому, что наблюдается на стимулируемой поверхности трехмерной среды. Стимулирующие электроды расположены по серединам сторон квадрата. Вся среда разделилась на четыре “зоны влияния” электродов, которые разделены ударными структурами (на рис. они сосредоточены вблизи диагоналей квадрата). Топологический заряд ревербератора переходит в топологический заряд

дислокации в поле одной из круговых волн.

Эта дислокация является поочередно обрывом фронта волны от каждого из электродов. В промежутки времени между перезамыканиями она описывает траектории, аналогичные имеющим место при обычном вынужденном дрейфе, однако в среднем остается на одном месте.

Положение этой точки практически не зависит от положения ядра превоначально вращавшегося ревербератора, если только оно располагалось внутри квадрата, в вершинах которого расположены электроды.

Рис. 6.3.1. Двумерная иллюстрация:
ПОЧЕМУ НЕЛЬЗЯ УНИЧТОЖИТЬ
ТОПОЛОГИЧЕСКИЙ ЗАРЯД на грани,
стимулируемой точечными
электродами. Электроды расположены
в серединах сторон квадрата.
Топологический заряд является
поочередно разрывом волны от
каждого из электродов.



Образно говоря, движение дислокации можно объяснить следующим образом: она подвержена вынуженному дрейфу поочередно в каждом из четырех полей круговых волн, так что в среднем ее положение остается неизменным.

По-видимому, упомянутый выше периодический режим в трехмерной среде достигается за счет того, что свиток приобретает кручение до тех пор, пока его частота не сравняется с частотой стимуляции. К сожалению, размеры среды были слишком малы, чтобы увидеть этот эффект.

Если электроды расположены так, что конец нити вихря находится под одним из них, то события развиваются следующим образом. Возникает новый участок линии особенностей, который соединяет нить вихря с поверхностью вблизи от электрода.

Если конец этой новой линии особенностей оказывается между электродами, то линия вскоре сглаживается и дальнейшие события аналогичны рис. 6.3.1. Если же этот конец оказывается между одним из электродов и границей, то в процессе вынужденного дрейфа, аналогичного двумерному, линия выталкивается на боковую грань и уничтожается.

В другой серии численных экспериментов варьировалось соотношение площади, покрытой электродами, и "свободной". При увеличении размеров электродов и уменьшении расстояния между ними отрыв линии особенностей от поверхности наблюдался, лишь когда расстояние между электродами составляло единицы шага сетки, т.е. было порядка диффузионной длины.

Главный вывод, следующий из этих экспериментов, состоит в том, что независимо от частоты стимуляции при разумной геометрии электродов не происходит глобальных изменений линии особенностей, аналогичных тем, которые происходят при стимуляции плоским электродом. После прекращения стимуляции развивается полноценный простой свиток; нить его может быть несколько смещена относительно первоначального положения.

Другими словами, заменить плоский электрод набором электродов в виде "щетки" можно, только если их ставить чрезвычайно близко друг к другу.

б) Воздействие электродом-“сеткой”.

В условиях эксперимента рис. 6.3.1 единственный способ уничтожить топологический заряд дислокации состоит в том, чтобы родить противоположный ему и заставить эти два заряда аннигилировать. В тех условиях, когда электроды "точечные", вероятность рождения такого заряда мала.

Простой способ родить такой заряд с вероятностью едини-

ца: надо стимулировать все четыре стороны квадрата (точнее говоря, любой замкнутый контур, окружающий точку сингулярности).

Этот способ может быть эффективно реализован, если возбуждать не "точечными" электродами, а "линейными". При большой площади поверхности трехмерной возбудимой среды есть смысл расположить такие электроды в виде "сетки".

На рис. 6.3.2 показана эволюция линии особенностей при периодическом воздействии таким электродом на простой свиток. Сразу же после начала стимуляции рождаются новые отрезки линии особенностей (на рис. их три). Положение этих отрезков зависит от момента начала стимуляции, но сам факт возникновения от этого не зависит.

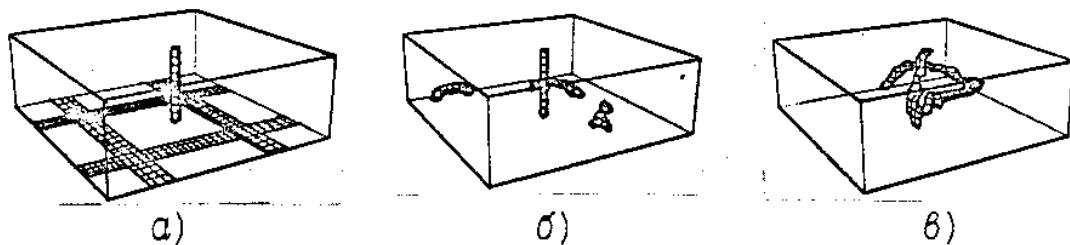


Рис. 6.3.2. ВОЗДЕЙСТВИЕ серии импульсов "ЭЛЕКТРОДА-СЕТКИ".
а) Нить первоначального вихря; на нижней грани показано положение электрода. б) Образовались новые фрагменты линии особенностей. в) При дальнейшей стимуляции фрагменты соединяются между собой и с нитью, далее все аналогично рис. 6.2.4.

В результате вынужденного дрейфа эти отрезки увеличиваются в размерах, пока их концы не сольются друг с другом и с нитью вихря. После того, как это произойдет и оставшийся конец выйдет на боковую грань, эволюция линии особенностей происходит качественно так же, как и при стимуляции всей верхней плоскости (см. рис. 6.2.4).

Численные эксперименты с электродом в виде многоячеистой "сетки" не проводились, однако их результаты теперь нет-

рудно предсказать. Новые отрезки линии особенностей возникают везде, где задний фронт волны возбуждения пересекает сетку. Легко видеть, что независимо от выбранного момента эти отрезки будут отстоять друг от друга не более чем на размер ячейки "сетки". В дальнейшем в процессе вынужденного дрейфа они будут расширяться, пока не сомкнутся и не соединят нить свитка с боковой гранью.

в) Обсуждение.

Итак, мы увидели, что для борьбы с риэнтри конструкция электрода далеко не безразлична. В случае, если электрод устроен в виде "щетки", эффективность его мала. Точнее говоря, если расстояние между отдельными контактами электрода с тканью не слишком мало, успех определяется жесткими условиями, аналогичными изложенным в разд. 5.2.

Электрод же в виде "сетки" с точки зрения этого метода вполне может заменить плоский электрод. Размер сетки существенен только в одном отношении: время, требующееся для полного очищения возбудимой ткани от циркуляции, можно оценить суммой толщины ткани и половины размера ячейки.

Если же размер ячейки имеет порядок размера ядра, то на устранение циркуляции с поверхности может оказаться достаточно всего одного импульса. Как мы увидим, при нормально возбудимой ткани, если можно пренебречь ее неоднородностями, одного импульса может оказаться достаточно и для устранения циркуляции из всей ткани, если даже она довольно толстая, т.к. в такой ткани нить "натянута" и при автономной эволюции самостоятельно погибает. Однако насколько практически все эти предположения, сейчас не очень ясно.

По-видимому, если вынужденный дрейф действительно может

быть реализован в сердечной ткани (пока таких сообщений автору не известно), то предлагаемый здесь метод будет не применим только при следующих условиях: циркуляция происходит вокруг анатомического препятствия (макро-риэнтри), причем ось циркуляции не выходит на стимулируемую поверхность, т.е. на ней не наблюдается ревербератор).

Можно ожидать от описанного метода следующих преимуществ: 1) больший спектр нарушений, для которых он применим (в т.ч. многие макро-риэнтри), по сравнению с однократной и периодической стимуляцией "точечным" электродом; 2) малое повреждающее воздействие и малая требуемая энергия по сравнению с классической дефибрилляцией.

6.4. Автономная эволюция изогнутого свитка.

а) Эволюция свитка с "натянутой" нитью.

Как мы видели в п. 4.2, в условиях, когда применимо асимптотическое эволюционное уравнение для изогнутой нити свитка, свиток эволюционирует таким образом, что ее длина уменьшается. Этот качественный вывод легко проверить в численном эксперименте.

Возможны разные способы задания начальных условий для такого эксперимента. Ниже описывается эксперимент, являющийся продолжением описанного в разд. 6.1, если последний прекратить до того, как вся нить в результате вынужденного дрейфа погибнет на нижней грани.

По окончании серии стимулирующих импульсов линия особенностей состоит из двух сегментов - горизонтального, представляющего собой линию дислокации в поле падающих волн, и вертикального, соответствующего нити первоначального свитка.

Эта линия служит "затравкой" для образования нового вихря сложной конфигурации: получившаяся линия особенностей служит нитью для этого нового вихря.

Его вращение не стационарно. На рис. 6.4.1 показаны последовательные положения нити вихря (линии особенностей) в различные моменты времени. Видно, что эволюция вихря приводит к сокращению длины его нити. По прошествии достаточного времени эта длина сокращается до нуля: вихрь "вымирает" и среди переходит в состояние покоя. Более внимательный анализ показывает, что локальная эволюция нити находится в качественном согласии с асимптотическим эволюционным уравнением, выписанным в разд. 4.2.

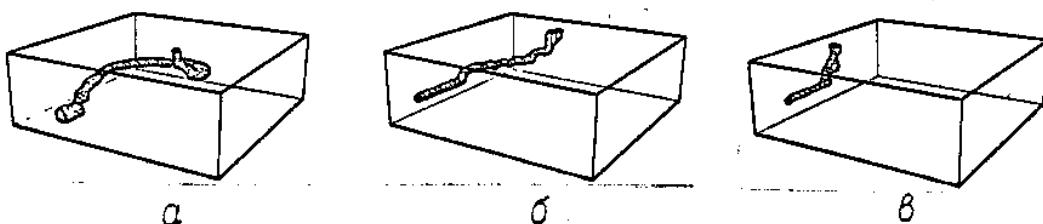


Рис. 6.4.1. УКОРОЧЕНИЕ НИТИ С ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМ НАТЯЖЕНИЕМ. Показаны положения нити приблизительно через 10 оборотов. Дальнейшая эволюция приводит к исчезновению вихря.

Аналогичные результаты получались и в других численных экспериментах, использовавших непосредственный способ задания начальных условий (см. разд. 5.1).

Проведенные численные эксперименты могут служить качественным подтверждением асимптотического эволюционного уравнения. Эволюция нити выглядит локальной (движение данной точки нити можно предсказать, зная лишь ее форму вблизи данной точки), не зависящей от истории (в разных экспериментах история была существенно разной), направление движения соответствует предсказанию

асимптотического уравнения, и, наконец, справедлив главный качественный вывод - длина нити в процессе эволюции уменьшается, независимо от ее формы.

б) Эволюция нити с "отрицательным натяжением".

Как мы видели в разд. 4.2, если кольцевая нить не коллапсирует, а расширяется (т.е. "натяжение" нити отрицательно), то полученное асимптотическое уравнение некорректно в формальном математическом смысле, подобно уравнению диффузии с отрицательным коэффициентом диффузии. С физической точки зрения это связано с быстрым нарастанием мелкомасштабных возмущений, что, естественно, противоречит сделанным при выводе асимптотического уравнения предположениям.

Можно предвидеть, что при более точном выводе в уравнении (4.2.25) появятся дополнительные члены: во-первых, нелинейные по кривизне, и, во-вторых, содержащие производные от функции $r(z)$ порядка выше второго.

Тогда при $P_1 < 0$ для каждой конкретной среды возможна реализация одного из следующих вариантов:

1) Уравнение (4.2.25) не справедливо, но зато приближенно справедливо уточненное уравнение, содержащее более высокие производные. Эти производные сглаживают слишком мелкомасштабные возмущения, и описание автоволнового режима как свитка с изогнутой нитью по-прежнему применимо.

Достаточно гладкие (крупномасштабные) возмущения прямой нити, очевидно, по-прежнему должны нарастиать, так что простой свиток неустойчив. Рост этих возмущений может быть остановлен нелинейными по кривизне членами и/или нелокальными взаимодействиями: при удлинении нити разные ее участки должны оказаться близки друг к другу, и в игру вступают

эффекты взаимодействия вихрей друг с другом и с границей.

2) Устойчивый автоволновой режим в такой среде не может быть описан как свиток с изогнутой нитью, и всякое уравнение типа (4.2.25) лишено смысла.

Если члены с производными высокого порядка также не имеют слаживающего характера, то может реализоваться только случай 2. В противном случае граница между названными альтернативами до некоторой степени условна: все зависит от того, с какого момента мы отказываемся считать автоволновой режим свитком с изогнутой нитью. Другими словами, разграничение между двумя случаями может потребовать введения малого параметра, характеризующего "плавность" нити.

Такой малый параметр можно ввести, если отрицательное натяжение нити мало по абсолютной величине. Пусть, например, эволюция нити описывается уравнением

$$\partial_t r = -\alpha \partial_s^2 r + \gamma \partial_s^4 r \quad (6.3.1)$$

и $\gamma > 0$, $\alpha > 0$, $\gamma \ll 1$, $\alpha \ll 1$. Тогда прямая нить будет неустойчива относительно возмущений вида $\cos(\alpha s)$ для α , лежащих в интервале от 0 до $(\alpha/\gamma)^{1/2} \ll 1$, и реализуется случай 1.

Случай 1 представляется более простым для интуитивного понимания, т.к. процессы допускают интерпретацию в привычных терминах. Случай 2, наоборот, служит обнаружение новых автоволновых режимов, не похожих на известные до сих пор.

Численные эксперименты [Panfilov, Rudenko 1987] указывают на область параметров в кусочно-линейном варианте уравнений ФитцХью-Нагумо, в которой нить будет иметь отрицательное натяжение. Эта область соответствует т.н. ревербераторам с аномальным (т.е. аномально большим) ядром, причем ядро ревербератора (а, следовательно, и его период) тем

больше, чем больше абсолютное значение натяжения. Численные эксперименты Ермаковой и др. [1986] показывают, что в этой области параметров ревербератор характеризуется также большим радиусом взаимодействия. Эти обстоятельства говорят о том, что для изучения эволюции нити с отрицательным натяжением требуются как модельные среды относительно большого размера, так и большие математические времена численных экспериментов. Все это удороожает эксперименты, особенно для параметров, при которых следует ожидать случая 2, т.е. появления качественно новых автоволновых режимов.

Ниже описываются результаты трех численных экспериментов на эту тему, для параметров вблизи границы области отрицательного натяжения.

Начальные данные для этих экспериментов задавались двумя разными способами:

1) Простой свиток с нитью, параллельной оси Z , подвергается возмущению путем изменения граничного условия на грани $Z=0$ с полной непроницаемости на проницаемость с коэффициентом 0.01 на 1 такт по времени (эксперимент 1 – среда размером $40 \times 40 \times 17$, эксперимент 2 – среда размером $40 \times 40 \times 20$).

2) Начальное условие – плоский фронт, обрезанный по прямой, не параллельной осям координат. В результате формируется вихрь с наклоненной нитью (эксперимент 3, среда размером $40 \times 40 \times 17$).

Параметры системы уравнений были одинаковыми для всех трех экспериментов, $g_f = 0.78$, период свободного ревербератора ок. 67.

Прежде всего, эксперименты с начальными условиями типа 2 дали, по сути, прямое подтверждение гипотезе о том, что

прямая нить неустойчива. Последовательные положения "толстой" нити через времена порядка 10 оборотов в эксперименте 1 показаны на рис. 6.4.2.

В процессе эволюции длина нити, как правило, увеличивается. Исключения составляют промежутки времени, когда какой-либо участок нити гибнет на границе. В экспериментах 1 и 2 так гибли только концевые участки; в эксперименте 3 на определенном этапе погиб промежуточный участок, в результате чего вместо одного вихря образовалось два (см. рис. 6.4.3).

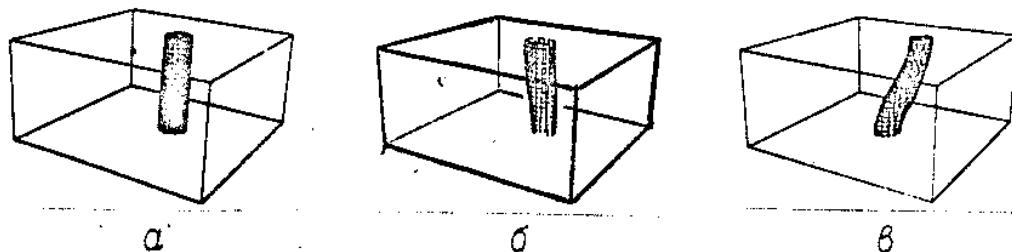


Рис. 6.4.2. НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ПРЯМОЙ НИТИ С ОТРИЦАТЕЛЬНЫМ НАТЯЖЕНИЕМ. Дальнейшая эволюция приводит к глобальным превращениям, см. рис. 6.4.3.

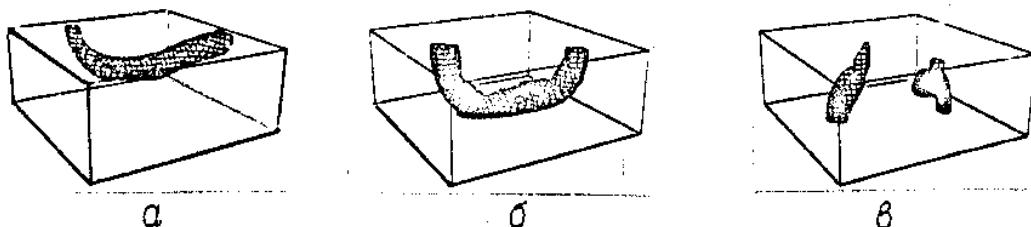


Рис. 6.4.3. УДВОЕНИЕ НИТИ С ОТРИЦАТЕЛЬНЫМ НАТЯЖЕНИЕМ. Промежуточный участок нити (б) гибнет в результате соприкосновения с нижней гранью.

Поскольку эксперименты по необходимости проходили на средах ограниченного объема, границы здесь играли значительную роль. Уже говорилось, что процесс роста длины нити сдерживался за счет гибели на границе целых участков

нити. Оказалось, кроме того, что близость к границе может демпфировать неустойчивость прямой нити.

Именно, все три проведенных численных эксперимента после этапа бурной эволюции, продолжавшегося от 30 до 100 оборотов, и включающего в себя удлинения за счет искривления, гибель некоторых участков на границе и глобальные изменения пространственной ориентации нитей, приводили к прямым нитям, но расположенным вблизи границы (рис. 6.4.4). После этого трехмерная специфика полностью исчезает, вихри дрейфуют вдоль границ по "двумерным законам".

Периоды таких квазидвумерных вихрей заметно меньше (на величину порядка 10%), чем у свободного ревербератора, что говорит о значительных взаимодействиях вихрей с границами (а в эксперименте 3 - и друг с другом). Это и дает возможность предположить, что неустойчивость прямой нити подавляется именно таким взаимодействием.

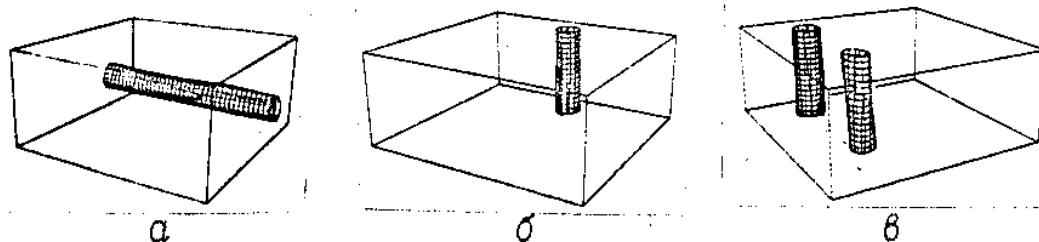


Рис. 6.4.4. ВARIАНТЫ "ОКОНЧАТЕЛЬНЫХ" ПОЛОЖЕНИЙ НИТИ С ОТРИЦАТЕЛЬНЫМ НАТЯЖЕНИЕМ.

Такое предположение подтверждается также простейшей феноменологической моделью процесса, см. Дополнение к данному разделу. Интересно, что для такой компенсации оказывается существенным значение коэффициента P_2 в (4.2.25), определяющего скорость дрейфа кольцевой нити вдоль ее оси симметрии. Смысл этого ограничения легко понять,

рассмотрев случай $P_2=0$. В этом случае согласно (4.2.25) начальное возмущение формы нити в какой-либо плоскости нарастает в дальнейшем в этой же плоскости. Таким образом, возмущения формы нити в плоскости, параллельной близлежащей границе, будут нарастать, т.к. расстояние от разных участков нити до границы будет оставаться неизменным, и взаимодействие с границей не будет препятствовать такому нарастанию.

в) Обсуждение.

Проведенные численные эксперименты качественно подтверждают теорию п. 4.2 и вытекающие из нее выводы. Обнаружены и новые явления: размножение вихрей в среде с отрицательным натяжением нити и компенсация неустойчивости прямой нити в такой среде благодаря "прилипанию" к границе.

Особенно интересным кажется размножение вихрей. Принято считать, что фибрилляция связана с возникновением и размножением автоволновых вихрей в сердце. До сих пор известен был только один механизм размножения вихрей [Кринский 1968], обусловленный неоднородностями среды. Однако этот механизм работает только на τ -модели и пока не был подтвержден на более реалистичных моделях. Здесь интересно отметить, что малые значения δ_f , при которых наблюдается отрицательное натяжение, как раз соответствуют пониженной возбудимости ткани.

ДОПОЛНЕНИЕ. Феноменологическая модель прилипания нити к границе.

Пусть нить описывается уравнением $y=y(x)$, $z=z(x)$, и пусть она почти прямая. Линеаризуя по отклонению формы нити от прямой, получим вместо (4.2.25)

$$\begin{cases} \dot{y} = -\alpha y'' + \beta z'', \\ \dot{z} = -\beta y'' - \alpha z'', \end{cases} \quad (6.3.2)$$

где $\alpha=-P_1 > 0$ — по предположению, натяжение нити отрицательно; $\beta=-P_2$. Система (6.3.2) некорректна; для "регуляризации", как и в (6.3.1), введем член с четвертой производной

$$\begin{cases} \dot{y} = -\alpha y'' + \beta z'' - \gamma y^{IV}, \\ \dot{z} = -\beta y'' - \alpha z'' - \gamma z^{IV}, \end{cases} \quad (6.3.3)$$

где $\gamma > 0$.

Пусть граница есть плоскость $z=\text{const}$. И пусть взаимодействие с границей описывается в духе гл. 3:

$$\begin{cases} \dot{y} = p(z), \\ \dot{z} = q(z). \end{cases} \quad (6.3.4)$$

Мы рассматриваем случай, когда двумерный вихрь "прилипает" к границе, т.е. $\exists z^*: p(z^*)=0$, $dp/dz(z^*)=-\mu < 0$. Как и в Дополнении к разд. 5.3, постулируем принцип суперпозиции "сил", обусловленных разными причинами. Объединив согласно этому принципу (6.3.3) и (6.3.4), перейдя к новым переменным $\tilde{z}=z-z^*$, $\tilde{y}=y-q(z^*)t$, ограничились линейным приближением по \tilde{z} и опустив знак \sim , получим:

$$\begin{cases} \dot{\tilde{y}} = -\alpha \tilde{y}'' + \beta \tilde{z}'' - \gamma \tilde{y}^{IV} + \nu \tilde{z}, \\ \dot{\tilde{z}} = -\beta \tilde{y}'' - \alpha \tilde{z}'' - \gamma \tilde{z}^{IV} - \mu \tilde{z}, \end{cases} \quad (6.3.5)$$

где $\nu = dq/dz(z^*)$.

Получим условия, при которых тривиальное решение этой системы устойчиво. Для амплитуд Y, Z возмущений с пространственным периодом $2\pi/k$ имеем

$$\begin{cases} \dot{Y} = (\alpha k^2 - \gamma k^4) Y + (\nu - \beta k^2) Z \\ \dot{Z} = \beta k^2 Y + (-\mu + \alpha k^2 - \gamma k^4) Z \end{cases} \quad (6.3.6)$$

Для устойчивости необходимо и достаточно, чтобы для любых вещественных k выполнялись условия

$$-\mu/2 + \alpha k^2 - \gamma k^4 < 0 \quad (6.3.7)$$

и

$$\det \begin{pmatrix} \alpha k^2 - \gamma k^4 & \nu - \beta k^2 \\ \beta k^2 & -\mu + \alpha k^2 - \gamma k^4 \end{pmatrix} > 0 \quad (6.3.8)$$

Из (6.3.7) получаем первое условие

$$2\mu > \alpha^2. \quad (6.3.9)$$

Переписав (6.3.8) в виде

$$k^2(\nu\beta - \mu\alpha) + k^4[\beta^2 + \mu\gamma + (\alpha - \gamma k^2)^2] > 0, \quad (6.3.10)$$

получим второе условие:

$$\nu\beta > \mu\alpha. \quad (6.3.11)$$

ВЫВОДЫ.

В работе получены следующие основные результаты:

1. Рассмотрена задача о медленно меняющихся автоволнах в системе "реакция-диффузия" общего вида. Получено уравнение для фазы медленно меняющихся автоволн, являющееся точным до величин порядка ε^2 . Оно описывает такие эффекты, как дисперсию (в порядке ε^0) и диффузию (в порядке ε) автоволн. Это уравнение содержит в качестве частных или предельных случаев ряд уравнений, полученных ранее другими исследователями. Указаны условия, когда волновой вектор имеет тенденцию к сглаживанию вдоль направления распространения.

2. Средствами асимптотической теории изучено взаимодействие автоволнового вихря с границами среды. Получены уравнения, описывающие дрейф вихря. Задача решена для конкретной модели автоволновой среды и доведена "до цифр".

3. Аналитически и в численном эксперименте изучено поведение автоволнового вихря в ограниченной среде с периодически меняющимися свойствами ("резонансный дрейф"). Впервые обнаружен и объяснен эффект отражения резонансно дрейфующего вихря от границ.

4. В рамках асимптотической теории изучена задача об эволюции трехмерного вихря сложной формы. Эволюционные уравнения выведены для двух случаев: а) Ось (нить) вихря имеет форму прямой линии, скрученность имеет произвольную величину, малый параметр - плавность изменения скрученности; б) Нить есть произвольная кривая, скрученность мала, малый параметр - кривизна нити.

Полученные эволюционные уравнения уточняют и обобщают ранее известные. В качестве следствий получены законы, определяющие направленность эволюции: для задачи а) указаны

условия, при которых скрученность стремится со временем к константе, для задачи б) - при которых длина нити уменьшается, независимо от начальных условий.

5. В численном эксперименте исследовано поведение трехмерного вихря в "слабой" среде, т.е. с нитью с отрицательным натяжением, когда асимптотическая теория не применима (соответствующее уравнение математически некорректно). В согласии с гипотезой, вытекающей из асимптотической теории, показано, что прямолинейная форма нити неустойчива. Эта неустойчивость может приводить к размножению вихрей. Показано также, что близость границ может стабилизировать прямолинейную форму нити.

6. В двумерных и трехмерных численных экспериментах исследована проблема уничтожения автоволновых вихрей в сердце путем однократной и многократной электрической стимуляции. Исследованы механизмы действия таких методов борьбы с автоволновыми вихрями в сердце, как электростимуляция и дефибрилляция. Описан механизм явления "частичной" дефибрилляции. Предложены новые методы электростимуляции: "синхронизированная делокализованная электростимуляция" и "приповерхностная стимуляция". Проведенные исследования позволяют предположить, что эти методы позволяют в значительной степени сочетать широкий спектр применимости дефибрилляции с малым повреждающим действием электростимуляции.

ЛИТЕРАТУРА

1. Агладзе К.И., Давыдов В.А., Михайлов А.С. (1987) "Наблюдение резонанса спиральных волн в возбудимой распределенной среде". Письма в ЖЭТФ, 45(12):601.
2. Балаховский И.С. (1965) "Некоторые режимы движения возбуждения в идеальной возбудимой ткани". Биофизика 9(6):1063.
3. Бражник П.К., Давыдов В.А., Зыков В.С., Михайлов А.С. (1987) "Вихревые кольца в распределенных активных средах". ЖЭТФ 93:1725.
4. Гулько Д.Б., Петров А.А. (1972) "Механизмы образования в возбудимых средах замкнутых путей проведения". Биофизика, №2, стр. 261-270.
5. Гурвич И.Л. (1975) "Основные принципы дефибрилляции сердца". Москва, "Медицина".
6. Давыдов В.А., Михайлов А.С. (1986) "Сpirальные волны в нелинейных средах", в кн. "Нелинейные волны", М., "Наука".
7. Давыдов В.А., Зыков В.С., Михайлов А.С., Бражник П.К. (1988) "Дрейф и резонанс спиральных волн в распределенных возбудимых средах". Изв.ВУЗов-Радиофизика 31(5):574-582.
8. Ермакова Е.А., Кринский В.И., Панфилов А.В., Перцов А.М. (1986) "Взаимодействие спиральных и плоских периодических автоволн в активной среде". Биофизика 31(2):318-323.
9. Ермакова Е.А., Перцов А.М. (1986) "Взаимодействие вращающихся спиральных волн с границей". Биофизика 31(5):855-861.
10. Ермакова Е.А., Перцов А.М., Шноль Э.Э. (1987) "Пары взаимодействующих вихрей в двумерных активных средах". Препринт ОНТИ НЦБИ, Пущино.
11. Жаботинский А.М., Заикин А.Н. (1971) "Пространственные

эффекты в автоколебательной химической системе", в кн. "Колебательные процессы в биологии и химических системах", т. 2: 279-283, Пущино.

12. Зыков В.С., Петров А.А. (1977) "О роли неоднородности возбудимой среды в механизмах самоподдерживающейся активности". Биофизика 22(2):300.
13. Зыков В.С. (1987) "Кинематика нестационарной циркуляции спиральных волн в возбудимой среде". Биофизика 32(2):337-340.
14. Кринский В.И. (1968) "Фибрилляция в возбудимых средах". Проблемы кибернетики 20: 59-80.
15. Медвинский А.Б., Перцов А.М., Полищук Г.А., Фаст В.Г. (1983), в кн. "Электрическое поле сердца", Москва, "Наука".
16. Михайлов А.С., Расул Г. (1988) "Распространение бегущей волны в неоднородной осциллирующей среде". Вестник МГУ, сер.3 "Физика, астрономия", 29(2):11.
17. Панфилов А.В., Перцов А.М. (1984). "Вихревые кольца в трехмерной активной среде, описываемой уравнениями реакция-диффузия". ДАН 274(6):1500-1503.
18. Панфилов А.В., Руденко А.Н., Перцов А.М. (1984) "Скрученные вихри в трехмерных активных средах". ДАН 279(4):1000-1002.
19. Панфилов А.В., Руденко А.Н., Винфири А.Т. (1985) "Скрученные вихревые кольца в трехмерных активных средах". Биофизика 30(3):464-466.
20. Панфилов А.В., Руденко А.Н., Кринский В.И. (1986) "Вихревые кольца в трехмерных активных средах с диффузией по двум компонентам". Биофизика 31(5):850-854.
21. Перцов А.М., Панфилов А.В. (1981) "Сpirальные волны в активных средах. Ревербератор в системе ФитцХью-Нагумо",

- в сб. "Автоболновые процессы в системах с диффузией":77, Горький, ИФ.
22. Руденко А.Н., Панфилов А.В. (1983) "Дрейф и взаимодействие вихрей в двумерной неоднородной активной среде". *Studia Biophysica* 98(3):183-188.
 23. Alessie M., Bonke F, Schopman F. (1973) "Circus movement in rabbit atrial muscle as a mechanism of tachicardia". *Circ. Res.* 33:52-54.
 24. Bhatnagar P.L. (1980) "Nonlinear waves in one-dimensional dispersive systems". - Clarendon Press, Oxford. Русский перевод: Бхатнагар П. Нелинейные волны в одномерных дисперсных системах. М.: Мир, 1983.
 25. Cross M.C., Newell A.C. (1984) "Convection patterns in large aspect ratio systems", *Physica D* 10(3):299-328.
 26. Erneux, Matkowsky (1984) "Quasi-periodic waves along a pulsating propagating front in a reaction-diffusion system". *SIAM J.Appl.Math.* 44(3).
 27. FitzHugh R. (1961) "Impulses and physiological states in theoretical models of nerve membrane". *Biophys. J.* 1(6):445-465.
 28. Greenberg J.M. (1976) "Periodic solutions to reaction-diffusion equations". *SIAM J. Appl. Math.* 30(2):199-205.
 29. Greenberg J.M. (1978) "Axi-symmetric, time-periodic solutions for lambda-omega systems". *SIAM J. Appl. Math.* 35(1):1-16.
 30. Greenberg J.M. (1980) "Spiral waves for lambda-omega system". *SIAM J. Appl. Math.* 39(2):301-309.
 31. Hagan P.S. (1982) "Spiral waves in reaction-diffusion equations" *SIAM J. on Appl. Math.*, 42(4):762-768.
 32. Hodgkin A.L., Huxley A.F. (1952) "A quantitative des-

cription of membrane current and its application to conduction and excitation in nerve". J. Physiol., 117:500.

33. Howard L.N., Kopell N. (1977) "Slowly varying waves and shock structures in reaction-diffusion equations". Stud. Appl. Math 56(2): 95-146.
34. Ivanitsky G.R., Krinsky V.I., Zhabotinsky A.M., Zaikin A.N. (1981) Sov. Sci. Rev 2:193.
35. Keener J.P. (1986) "A geometrical theory for spiral waves in excitable media". SIAM J. Appl. Math. 46(6):1039-1056.
36. Keener J.P. (1988) "The dynamics of three dimensional scroll waves in excitable media". Physica D 31:269-276.
37. Kopell N., Howard L.N. (1973) "Plane wave solutions to reaction-diffusion equations". Stud. Appl. Math. 52(4).
38. Krinsky V.I., Agladze K.I. (1983) "Interaction of rotating waves in an active media". Physica D 8:50-56.
39. Kuramoto Y., Tsuzuki T. (1975) "On the formation of dissipative structures in reaction-diffusion systems. Reduction perturbation approach". Prog.Theor.Phys. 54(3):687.
40. Kuramoto Y., Yamada T. (1976) "Pattern formation in oscillatory chemical reaction" Prog. Theor. Phys., 56(3):724-739.
41. Kuramoto Y. (1980) "Instability and turbulence of wave-fronts in reaction-diffusion systems" Prog. Theor. Phys., 63(6).
42. Kuramoto Y., Koga S. (1981) "Turbulized rotating chemical wave" Prog. Theor. Phys., 66(3): 1081-1083.
43. Livshits M.A. (1983) "Chemical waves as a result of in-

stability in reaction-diffusion systems". Z. Phys. B 53:83-88.

44. Malomed B.A. (1983) "Nonsteady waves in distributed dynamical systems". Physica D, 8(3):353-359.
45. Malomed B.A. (1984) "Nonlinear waves in nonequilibrium systems of the oscillatory type". Z. Phys. B. 55: 241-256.
46. Mikhailov A.S., Krinsky V.I. (1983) "Rotating spiral waves in excitable media: the analytical results" Physica D, 9:346=371.
47. Mikhailov A.S., Panfilov A.V., Rudenko A.N. (1985) "Twisted scroll-waves in active three-dimensional media". Phys. Lett., 109A(5): 246-250.
48. Nagumo J., Arimoto S., Yoshizawa S. (1962) "An active pulse transmission line simulating nerve axon". Proc. IRE 50:2061.
49. Nandapurkar P.J., Winfree A.T. (1987) "A computational study of twisted linked scroll waves in excitable media." Physica D 29:69-83.
50. Ortoleva P., Ross J. (1973) "Phase waves in oscillatory chemical reaction" J. Chem. Phys., 58(12): 5673-5680.
51. Panfilov A.V., Rudenko A.N. (1987) "Two regimes of the scroll ring drift in three-dimensional active media" Physica D 28:215-218.
52. Roessler O.E., Kahlert C. (1979) "Winfree meandering in a 2-dimensional 2-variable excitable medium". Z. Naturforsch. 34:565.
53. Welsh B.J., Gomatam J.G., Burgess A.E. (1983) "Three-dimensional chemical waves in the Belousov-Zhabotinsky reaction" Nature, 304(5927):611-614.
54. Wiener N., Rosenblueth A. (1946) "The mathematical for-

mulation of the problem of conduction of impulses in a network of connected excitable elements, specifically in cardiac muscle" Arch. Inst. Cardiologia de Mexico 16(3-4)205. Русский перевод: Винер Н., Розенблют А. "Проведение импульсов в сердечной мышце. Математическая формулировка проблемы проведения импульсов в сети связанных возбудимых элементов, в частности, в сердечной мышце." Кибернетич. сб., №3, М., ИЛ, 1961.

55. Winfree A.T. (1972) "Spiral waves of chemical activity", Science 175:634-646.
56. Winfree A.T. (1973) "Scroll-shaped waves of chemical activity in three dimensions" Science, 181(4103):937-938.
57. Winfree A.T., Strogatz S.H. (1983) "Singular filaments organize chemical waves in three dimensions" Physica D, 8:35, 9:65, 333, 221.
58. Yakushevich L.V. (1984) "Vortex filament elasticity in active medium" Studia Biophysica, 100(3):195-200.

БЛАГОДАРНОСТИ.

Автор выражает глубокую благодарность своим научным руководителям Э.Э.Шнолю и В.И.Кринскому, без неустанного внимания которых написание работы было бы невозможным.

Автор благодарен также К.И.Агладзе, Р.А.Алиеву, И.С.Арансону, Б.А.Васиеву, А.Т.Винфири, Б.А.Давыдову, Е.А.Ермаковой, Б.А.Маломеду, О.А.Морневу, В.Г.Фасту за полезные обсуждения, а А.В.Панфилову и А.М.Перцову также и за постановку некоторых задач.

Автор признателен В.Р.Кочину и А.В.Самарину, любезно предоставивших в его распоряжение пакет графических программ "АТОМ", при помощи которых были получены трехмерные рисунки.