

Российская Академия Наук  
Институт Математических Проблем Биологии

На правах рукописи  
УДК 577.3

Бикташева Ирина Владимировна

# Динамика спиральных волн: описание при помощи функций отклика.

Диссертация на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

## Специальность 03.00.02 (Биофизика)

Научные консультанты: доктор физико-математических наук  
Шноль Эммануил Эльевич  
кандидат физико-математических наук  
Бикташев Вадим Надырович  
Пущино 2000

# Оглавление

<b>1 Введение.</b>	<b>7</b>
1.1 Спиральные волны и их динамика . . . . .	7
1.2 Асимптотическая теория динамики спиральных волн . . . . .	11
1.2.1 Первоначальные определения . . . . .	11
1.2.2 Конечномерная аналогия . . . . .	12
1.2.3 Функции отклика. . . . .	15
1.3 Резюме . . . . .	18
1.4 Задачи данной работы. . . . .	19
<b>2 Функции отклика спиральных волн в комплексном уравнении Гинзбурга-Ландау.</b>	<b>22</b>
2.1 Математическая постановка задачи. . . . .	22
2.1.1 Задача о спиральной волне. . . . .	22
2.1.2 Задача о функциях отклика. . . . .	26
2.2 Метод решения. . . . .	28
2.3 Результаты. . . . .	30
2.4 Выводы . . . . .	31
<b>3 Зависимость функций отклика от параметров.</b>	<b>35</b>
3.1 Методы. . . . .	35
3.2 Результаты. . . . .	36
3.2.1 Существование ФО при разных параметрах. . . . .	36

3.2.2	Смена направления вращения спиралей . . . . .	38
3.2.3	Делокализация ФО при больших длинах волн спирали . . . . .	38
3.2.4	Переход от монотонных к осциллирующим ФО. . . . .	41
3.2.5	Линия Экхаузовой неустойчивости. . . . .	43
3.3	Выводы . . . . .	45
<b>4</b>	<b>Резонансный дрейф.</b>	<b>46</b>
4.1	Теория явления. . . . .	46
4.2	Результаты. . . . .	52
4.3	Выводы . . . . .	56
<b>5</b>	<b>Дрейф под влиянием неоднородности среды.</b>	<b>57</b>
5.1	Теория явления . . . . .	57
5.2	Результаты. . . . .	61
5.2.1	Неоднородность по коэффициенту нелинейной дисперсии. . . . .	61
5.2.2	Неоднородность по частоте основных колебаний. . . . .	63
5.3	Выводы . . . . .	67
<b>Заключение</b>		<b>68</b>
<b>Благодарности</b>		<b>69</b>
<b>Литература</b>		<b>70</b>
<b>A</b>	<b>Вывод уравнений для функций отклика в комплексном уравнении Гинзбурга-Ландау.</b>	<b>79</b>
A.1	Нелинейная задача. . . . .	79
A.2	Вывод уравнений для функций отклика . . . . .	84
A.3	Временная мода ( $n = 0$ ). . . . .	90
A.4	Пространственная мода ( $n = 1$ ) . . . . .	96

<b>B Численный метод нахождения функций отклика.</b>	<b>102</b>
B.1 Метод решения . . . . .	102
B.2 Формулировка нелинейной задачи для численного нахождения Хагановской спиральной волны . . . . .	103
B.3 Формулировка линейной задачи для численного нахождения временной моды . . . . .	105
B.4 Формулировка линейной задачи для численного нахождения пространственной моды . . . . .	106

# Список иллюстраций

1.1	Возмущение инвариантного многообразия . . . . .	13
2.1	Абсолютные величины собственных значений как функции шага дискретизации и радиуса обрезания. . . . .	31
2.2	Решение нелинейной краевой задачи и ФО как функции $\rho$ ( $\alpha = 0.5$ , $\beta = 0$ ). . . . .	32
2.3	Сpirальная волна и ФО как функции точки на плоскости ( $\alpha = 0.5$ , $\beta = 0$ ). . . . .	32
2.4	Сpirальная волна и ФО изображенные как градации серого цвета на плоскости ( $\alpha = 0.5$ , $\beta = 0$ ). . . . .	33
3.1	Исследованная область на плоскости $(\alpha, \beta)$ . . . . .	36
3.2	Сpirальная волна и ФО ( $\alpha = 0.1$ , $\beta = -0.9$ ). . . . .	37
3.3	Сpirальная волна и ФО ( $\alpha = 0.1$ , $\beta = 0.1$ ). . . . .	39
3.4	Сpirальная волна и ФО ( $\alpha = 0.5$ , $\beta = 0.5$ ). . . . .	42
3.5	Сpirальная волна и ФО ( $\alpha = 1$ , $\beta = 1$ ). . . . .	44
4.1	Резонансный дрейф спиральной волны в КУГЛ. . . . .	49
4.2	Траектории резонансного дрейфа при разных $\epsilon$ . . . . .	53
4.3	Скорость дрейфа как функция амплитуды возмущения и как функция шага по времени. . . . .	54
5.1	Сpirальная волна и ФО ( $\alpha = 0.1$ , $\beta = 0.6$ ). . . . .	61

5.2	Нормализованные компоненты скорости дрейфа вследствие неоднородности по коэффициенту нелинейной дисперсии $\alpha$ , в зависимости от $\Delta t$ .	62
5.3	Нормализованные компоненты скорости дрейфа вследствие неоднородности по коэффициенту нелинейной дисперсии $\alpha$ , в зависимости от $\Delta\rho$ и $\Delta x$ .	63
5.4	Нормализованные компоненты скорости дрейфа вследствие неоднородности по частоте синхронных колебаний среды $\Omega$ , в зависимости от $\Delta t$ .	64
5.5	Нормализованные компоненты скорости дрейфа вследствие неоднородности по частоте синхронных колебаний среды $\Omega$ , в зависимости от $\Delta\rho$ и $\Delta x$ .	64
5.6	Сpirальная волна и ФО ( $\alpha = 0, \beta = -1$ ).	65
5.7	Сpirальная волна и ФО ( $\alpha = -1, \beta = -1$ ).	66
5.8	Нормализованные скорости дрейфа как функции $\alpha$ ( $\beta = -1$ ).	66

# Список таблиц

A.1	Знаки коэффициентов и корней характеристического уравнения, правило Декарта. . . . .	95
A.2	Знаки коэффициентов и корней характеристического уравнения, правило Декарта и кубическая теорема Виета. . . . .	96

# Глава 1

## Введение.

### 1.1 Спиральные волны и их динамика

Большую роль в живых системах играют автоволновые процессы, при которых распространение волны поддерживается за счет распределенного в среде источника энергии. В средах, способных к проведению автоволн, возможны автоволновые вихри, также называемые спиральными волнами, вихрями риэнтри, роторами, ревербераторами и т.д., которые, в свою очередь, являются источниками автоволн. Существование спиральных волн может быть не связано с какими-либо дополнительными особенностями среды, а обусловлено лишь предысторией. Одной из наиболее важных с практической точки зрения областей изучения спиральных волн являются волны риэнтри в сердечной мышце, вызывающие опасные аритмии, в т.ч. фибрилляцию.

Гипотеза о риэнтри, т.е. круговой циркуляции возбуждения в сердечной ткани, как ключевом механизме фибрилляции сердца, восходит к началу двадцатого века [6], [7]. Первые попытки математического моделирования циркуляции возбуждения были предприняты Винером и Розенблютом [8], основываясь на “аксиоматическом” описании сердечной ткани как сети конечных автоматов. Эти исследования были продолжены и развиты советскими математиками и биофизиками [9, 10, 11],

что привело к концепции спиральной волны как математического образа волн риэнтри и как элементарного механизма, лежащего в основе самоподдерживающейся асинхронной активности сердечной мышцы — фибрилляции.

Первое экспериментальное наблюдение спиральных волн было в химической возбудимой среде — реакции Белоусова-Жаботинского [12], а вскоре за этим и в сердечной ткани — в препарате желудочка сердца кролика [13]. После этого спиральные волны были наблюдены в целом ряде других активных пространственно-распределенных систем, как биологического так и не биологического происхождения: в сетчатке глаза [14], в колониях социальных микроорганизмов [15], одиночных ооцитах [16], в реакции каталитического окисления окиси углерода [17], и ржавения поверхности стали в кислоте при доступе воздуха [18], в жидкокристаллических [19] и лазерных [20] системах.

Изучению спиральных волн в сердечной ткани уделяется особенно большое внимание, поскольку это связано с надеждами на улучшение существующих и создание новых методов борьбы с порождаемыми волнами риэнтри сердечными аритмиями, включая фибрилляцию. Экспериментальные методы исследования спиральных волн в сердце неуклонно совершенствовались в течение последних десятилетий, и к настоящему времени достигли впечатляющих успехов как в плане достижимых разрешений (миллисекунды, миллиметры и милливольты), так и в плане адекватности экспериментальных моделей. Последние экспериментальные результаты, с одной стороны, подтверждают роль риэнтри в фибрилляции, с другой — открывают все новые особенности проявления этих волн [21, 22].

Теоретическое понимание спиральных волн продвигалось, в частности, за счет успехов количественной физиологии. Цикл работ Ходжкина и Хаксли [23] показал, что феномен биологической возбудимости (в их работах объектом был гигантский аксон кальмара) может быть не только объяснен на основе понимания биофизических механизмов, но и количественно описан с впечатляющей точностью. Разработанные методики были в дальнейшем использованы для исследования и описания поведения сердечных клеток, начиная с работы Д. Нобла [24], который модифицировал

уравнения Ходжкина и Хаксли для описания кинетики возбудимости клеток волокон Пуркинье, и кончая современными моделями, разработанными для разных типов сердечных клеток и включающими десятки переменных, описывающих внутри- и внеклеточные концентрации ионов, состояние ионных каналов и насосов и внутриклеточных резервуаров кальция [25, 26, 27, 28].

Другим фактором, обеспечившим лучшее понимание спиральных волн, явилось математическое исследование уравнений, описывающих сердечную ткань. Поскольку это — нелинейные уравнения в частных производных, их исследование велось прежде всего численными методами. Это позволило наработать огромный эмпирический материал как по существованию спирально-волновых решений в различных системах, более или менее точно описывающих сердечную ткань или другие автоволновые системы[29, 30, 31, 32, 33, 34, 35], так и по динамике этих решений. Динамика спиральных волн может быть условно подразделена на три вида. Первый — это “жесткая динамика” — возникновение или гибель спиральных волн в результате самопроизвольной эволюции решений или каких-либо внешних воздействий[11, 36, 37, 17, 38, 39, 40, 41, 42]. Второй — это “спонтанная” динамика — нестационарная циркуляция (меандр) спиральных волн, не связанная с внешними воздействиями и не приводящая к их гибели или рождению новых спиралей[43, 44, 45, 46, 47, 31, 48, 49, 35, 50]. Третий — это “мягкая” динамика спиральных волн — например, постепенное перемещение их центра в пространстве, связанное с их взаимодействием между собой, с неоднородностями среды или ее границами, или под влиянием слабых внешних воздействий[51, 52, 53, 54, 55, 56, 57].

По мере того, как накапливался опыт численного и физического (по преимуществу, в реакционной среде Белоусова-Жаботинского и ее модификациях) моделирования, развивались также и приближенные (асимптотические) методы исследования спиральных волн. Некоторые методы были основаны на специфических особенностях определенных систем реакция+диффузия, как, например, “кинематический подход” [45, 58, 59, 60, 61, 62] и “метод свободной границы” [63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70], которые сводят математическую задачу о распространении волн в уравнениях в частных

производных к задаче о распространении фронтов этих волн, аналогично принципу Гюйгенса в классической теории волн, с поправкой на специфические свойства автоволн. Два вышеупомянутых подхода зависят от наличия в системе определенных малых параметров, которые феноменологически выражаются, например, в малости отношения длительности фронта волны к другим характерным временам задачи.

Другое направление основывается на более фундаментальных свойствах спиральных волн и не предполагает специальных свойств системы “реакция+диффузия”, кроме самых общих. Первоначально это направление развивалось для спонтанной динамики трехмерных аналогов спиральных волн, т.н. свитковых волн[71, 72, 73]. Это — теория возмущения, в которой малый параметр не предполагается в самой системе уравнений, но который определяет рассматриваемый класс решений. В теории свитковых волн малыми параметрами служили кривизна нити свитка и/или его “твист”. Описываемые эффекты были, например, спрямление или же, наоборот, самопроизвольный изгиб нитей свитков. В работе [74] этот подход был применен также и для мягкой динамики спиральных волн на плоскости, где малым параметром служат интенсивность внешнего воздействия или неоднородность среды.

Все эти исследования имеют принципиальное значение для понимания эволюции рециркуляционных аритмий. Так, условия жесткого рождения спиральных волн (феномен уязвимости) помогают понять механизмы действия (или причины неудач) тех или иных антиаритмиков [75], закономерности меандра спиральных волн могут объяснить механизм такого специфического вида аритмий как *torsade-de-point*[49], самопроизвольный изгиб нитей свитковых волн может лежать в основе развития фибрилляции[56, 42], а мягкий дрейф спиральных волн в результате слабого, но периодического внешнего воздействия с периодом, близким к собственному периоду вращения спиральной волны (т.н. резонансный параметрический дрейф[58, 76]), может быть предложен как щадящий метод подавления аритмий[77].

Данная работа посвящена дальнейшему развитию подхода [74] и представляет собой, по существу, первое прямое применение этого подхода к конкретной системе

“реакция+диффузия”, в том числе — для конкретных задач о дрейфе спиральных волн.

Рассмотрим теорию, предложенную в [74], более подробно, чтобы ввести основные обозначения и понятия, используемые в диссертации, и поставить задачу математически. При этом мы в основном будем следовать порядку изложения и обозначениям, принятым в нашей работе [2].

## 1.2 Асимптотическая теория динамики спиральных волн

### 1.2.1 Первоначальные определения

Рассматривается система “реакция-диффузия” в двух пространственных переменных

$$\partial_t \mathbf{u} = \mathbf{f}(\mathbf{u}) + \mathbf{D}\nabla^2 \mathbf{u} + \epsilon \mathbf{h}, \quad \mathbf{u}, \mathbf{f}, \mathbf{h} \in \mathbb{R}^\ell, \quad \mathbf{D} \in \mathbb{R}^{\ell \times \ell}, \quad \ell \geq 2. \quad (1.1)$$

где  $\mathbf{u}(\vec{r}, t)$  — вектор-столбец концентраций реагентов,  $\mathbf{f}(\mathbf{u})$  — вектор-столбец скоростей реакций,  $\mathbf{D}$  — матрица коэффициентов диффузии,  $\epsilon \mathbf{h}(\mathbf{u}, \vec{r}, t)$  — малое возмущение, и  $\vec{r} \in \mathbb{R}^2$  — вектор координат на плоскости. В моделях сердечной ткани роль концентраций реагентов играют трансмембранные напряжения, воротные переменные каналов и ионные концентрации, а роль диффузии играет межклеточная проводимость, так что единственный дифундирующий “реагент” — трансмембранные напряжения.

Предполагается, что система (1.1) имеет решения в виде стационарно вращающейся спиральной волны:

$$\mathbf{u} = \mathbf{U}(\vec{r}, t) = \mathbf{U}(\rho(\vec{r}), \vartheta(\vec{r}) + \omega t). \quad (1.2)$$

Здесь

$$\theta = \vartheta(\vec{r}) + \omega t$$

— полярный угол в системе отсчета, вращающейся равномерно с угловой скоростью  $\omega$ , а  $\rho(\vec{r})$  и  $\vartheta(\vec{r})$  — полярные координаты в исходной (лабораторной) системе отсчета.

Такие решения наблюдаются в различных системах реакция+диффузия. Во многих системах, включая ряд моделей сердечной ткани, спиральные волны не вращаются стационарно, но описывают сложное движение называемое “меандром”. Случай стационарно вращающихся волн много проще, и его теория разработана много лучше; в данной работе рассматривается только этот случай.

Заметим, что невозмущенная система “реакция+диффузия”, т.е. (1.1) с  $\epsilon \mathbf{h} = 0$ , имеет очевидную, но важную симметрию: она инвариантна относительно Евклидовой группы движений плоскости  $\{\vec{r}\}$ . Так как решение (1.2) при каждом фиксированном  $t$  не инвариантно относительно этой группы, группа “размножает” это решение. Таким образом,

$$\tilde{\mathbf{U}} = \mathbf{U}(\rho(\vec{r} - \vec{R}), \vartheta(\vec{r} - \vec{R}) + \Theta), \quad (1.3)$$

где  $\Theta = \omega t - \Phi$ , — другое решение, для любых постоянных вектора смещения  $\vec{R} = (X, Y)^\dagger$  и начальной фазы вращения  $\Phi$ .

Следовательно, если невозмущенная система имеет одно решение в виде спиральной волны, то она имеет целое трехмерное *многообразие* таких решений, нейтрально устойчивое относительно сдвига вдоль этого многообразия.

### 1.2.2 Конечномерная аналогия

Асимптотическая теория дрейфа спиральных волн [74] была основана на аналогии с конечномерной задачей возмущения инвариантного многообразия (см. рис. 1.1). Если векторное поле  $\mathbf{f}(\mathbf{u})$  в фазовом пространстве  $\mathbb{R}^n$  имеет инвариантное  $m$ -мерное многообразие  $\mathbf{U}(\mathbf{a})$ ,  $m < n$ , устойчивое как целое, то малое возмущение этого векторного поля будет, при определенных условиях, сохранять это инвариантное многообразие, лишь слегка его смешая,  $\mathbf{U} \mapsto \mathbf{U}'$ . Другим результатом возмущения является небольшое изменение векторного поля  $\mathbf{A}'(\mathbf{a})$  на сдвинутом многообразии по

сравнению с исходным полем  $\mathbf{A}(\mathbf{a})$ . На практике исходное инвариантное многообразие  $\mathbf{U}(\mathbf{a})$  может существовать, благодаря группе симметрии. В этом случае, поток на многообразии может быть вырожденным, и тогда возмущение общего вида будет снимать это вырождение.

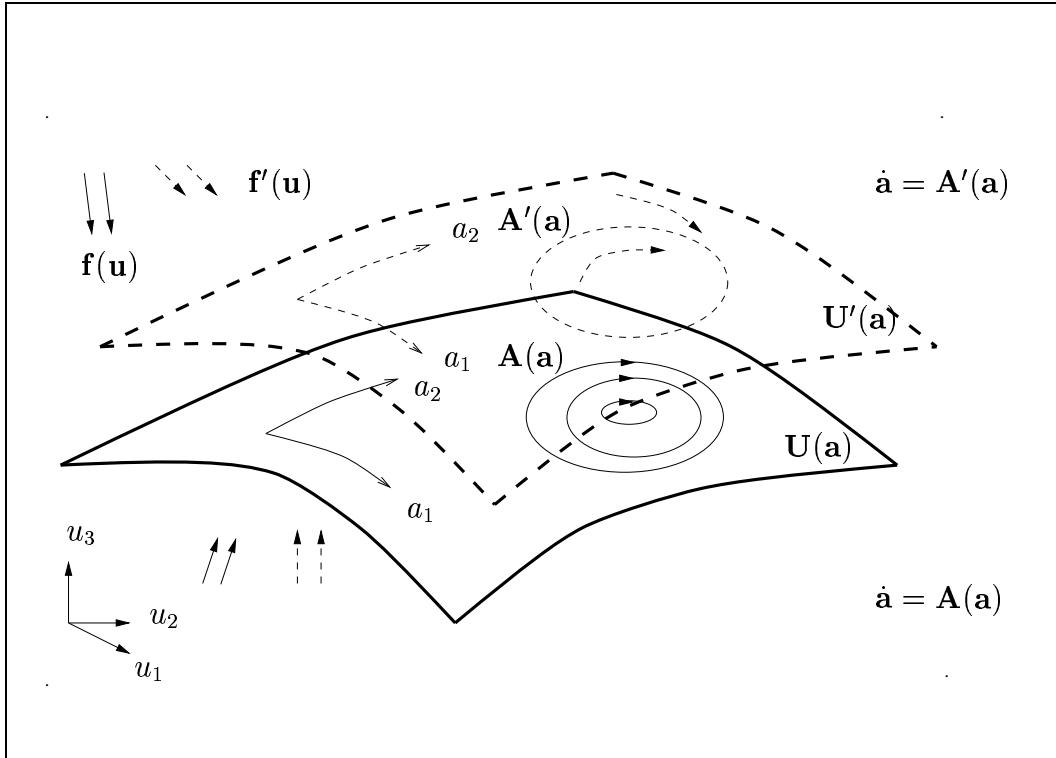


Рис. 1.1: Возмущение инвариантного многообразия. Векторное поле  $\mathbf{f}(\mathbf{u})$  в фазовом пространстве с координатами  $\mathbf{u}$  имеет инвариантное многообразие  $\mathbf{U}$  с координатами  $\mathbf{a}$ , а  $\mathbf{A}$  — векторное поле на этом многообразии. Возмущенное векторное поле  $\mathbf{f}'(\mathbf{u})$  имеет слегка отличающееся инвариантное многообразие  $\mathbf{U}'$ , и слегка отличающееся векторное поле  $\mathbf{A}'$  на нем. Исходные объекты показаны сплошными линиями, возмущенные объекты — пунктиром.

Чтобы сравнить два векторных поля: на исходном и на возмущенном многообразии, нам необходимо соотнести их системы координат  $\{\mathbf{a}\}$ . Естественный способ сделать это — потребовать, чтобы вектор, соединяющий две соответствующих точки,  $\mathbf{U}(\mathbf{a})$  и  $\mathbf{U}'(\mathbf{a})$ , не имел бы компонент вдоль многообразия, т.е. вдоль любого

из касательных векторов  $\mathbf{V}_j(\mathbf{a}) = \partial\mathbf{U}/\partial a_j$ . Другими словами, он должен быть ортогонален,

$$\langle \mathbf{W}_j(a), \mathbf{U}'(a) - \mathbf{U}(a) \rangle = 0, \quad j = 1 \dots m, \quad (1.4)$$

к проекторам  $\mathbf{W}_j(a)$  на касательные векторы  $\mathbf{V}_j(a)$ :

$$\langle \mathbf{W}_j(a), \mathbf{V}_k(a) \rangle = \delta_{j,k}. \quad (1.5)$$

Эти проекторы являются собственными функциями сопряженной линеаризованной матрицы  $(\partial\mathbf{f}/\partial\mathbf{u})^T(\mathbf{a})$ . Вышеупомянутые два действия возмущения производятся двумя его компонентами: вдоль и поперек многообразия, как они определены проекторами  $\mathbf{W}_j$ . Например, для многообразия, состоящего целиком из неподвижных точек, продольная компонента возмущения будет определять медленный дрейф вдоль этого многообразия.

Если эта конечномерная схема может быть применена к спиральным волнам, то роль векторного поля играет система “реакция+диффузия”, так что фазовое пространство — это некоторое функциональное пространство. Инвариантное многообразие — трехмерное многообразие спиральных волн, которое возникает, благодаря Евклидовой группе движений плоскости. Координаты на этом многообразии — центр вращения спиральной волны  $\vec{R} \in \mathbb{R}^2$  и угол поворота  $\Theta$ . Поток на многообразии вырожден, поскольку состоит из нейтрально устойчивых периодических орбит, которые соответствуют вращению спиральных волн вокруг фиксированных центров:

$$\Theta = \omega t - \Phi, \quad \Phi = \text{const}; \quad \vec{R} = \text{const}. \quad (1.6)$$

Возмущение снимает это вырождение, и мы наблюдаем дрейф спиралей. По аналогии с конечномерным случаем поток на многообразии спиральных волн описывается уравнениями:

$$\partial_t \Theta = \omega + \epsilon H_0(\vec{R}, \Theta), \quad \partial_t \vec{R} = \epsilon \vec{H}_1(\vec{R}, \Theta), \quad (1.7)$$

где  $H_0$  и  $\vec{H}_1$  — проекции возмущения на касательное пространство многообразия  $\mathbf{U}(\mathbf{a})$ . Правые части уравнений (1.7) зависят от фазы  $\Theta$ . На временах порядка  $\epsilon^{-1}$  эта фаза быстро осциллирует; усреднение по этим колебаниям дает уравнения движения спиральной волны:

$$\partial_t \overline{\Theta} = \omega + \epsilon \overline{H_0}(\vec{R}) + O(\epsilon^2), \quad \partial_t \overline{\vec{R}} = \epsilon \overline{\vec{H}_1}(\vec{R}) + O(\epsilon^2). \quad (1.8)$$

### 1.2.3 Функции отклика.

Конечномерная аналогия предполагает, что динамика спиральных волн, по-видимому, так же как и других диссипативных структур, описывается “Аристотелевой” механикой, когда скорости движения пропорциональны приложенным напряжениям. Правые части уравнений движения (1.8), т.е. “силы”, являются проекциями возмущения на соответствующее касательное пространство инвариантного многообразия спиральных волн  $\mathbf{U}(\mathbf{a})$ . Это касательное пространство является линейной оболочкой Голдстоновских мод, соответствующих сдвигам вдоль группы симметрии при  $\vec{R} = \mathbf{0}$  и  $\Theta = 0$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_0 &= -\omega^{-1} \partial_t \mathbf{U}(\vec{r}, t) = -\partial_\theta \mathbf{U}(\rho(\vec{r}), \vartheta(\vec{r}))|_{t=0}, \\ \mathbf{V}_{\pm 1} &= -\frac{1}{2} e^{\mp i\omega t} (\partial_x \mp i\partial_y) \mathbf{U}(\vec{r}, t) = -\frac{1}{2} e^{\mp i\vartheta} (\partial_\rho \mp i\rho^{-1} \partial_\vartheta) \mathbf{U}(\rho(\vec{r}), \vartheta(\vec{r}))|_{t=0}. \end{aligned} \quad (1.9)$$

При этом  $\mathbf{V}_0$  соответствует сдвигу во времени (или, что то же, повороту в пространстве), а  $\mathbf{V}_1$  — сдвигу в пространстве.

Голдстоновские моды представляют собой критические собственные функции

$$\tilde{\mathcal{L}} \mathbf{V}_n = i\omega n \mathbf{V}_n, \quad n = 0, \pm 1 \quad (1.10)$$

линеаризованного оператора  $\tilde{\mathcal{L}}$ :

$$\tilde{\mathcal{L}} = D\nabla^2 - \omega \partial_\theta + \left( \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} \right) \Big|_{\mathbf{u}=\mathbf{U}(\vec{r})}. \quad (1.11)$$

Слагаемое ” $-\omega\partial_\theta$ ” здесь появилось вследствие перехода в систему отсчета, вращающуюся вместе со спиральной волной. В этой системе отсчета невозмущенное решение (1.2) стационарно и  $\tilde{\mathcal{L}}$  не зависит от времени.

Для каждой точки на многообразии спиральных волн операторы проектирования отображают функциональное пространство возмущений в трехмерное пространство, касательное к этому многообразию, т.е. представляют собой просто три функционала. Поскольку все точки многообразия спиральных волн эквивалентны друг другу с точностью до некоторого Евклидового преобразования плоскости, достаточно знать функционалы-проекторы в одной точке этого многообразия, то есть для одного положения спиральной волны. Отсюда следует, что если функционалы  $\overline{H}_n$  записаны в виде интегралов, то они должны иметь вид:

$$\overline{H}_n(t) = e^{in\Phi} \oint_{t-\pi/\omega}^{t+\pi/\omega} \frac{\omega d\tau}{2\pi} \iint_{\mathbb{R}^2} d^2\vec{r} e^{-in\omega\tau} \left\langle \mathbf{W}_n \left( \rho(\vec{r} - \vec{R}), \vartheta(\vec{r} - \vec{R}) + \omega\tau - \Phi \right), \mathbf{h} \right\rangle, \quad (1.12)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{h} &= \mathbf{h}(\mathbf{U}(\vec{r}, \tau), \vec{r}, \tau), \\ \vec{R} &= \vec{R}(t), \\ \Phi &= \Phi(t), \\ \overline{H}_1 &= (\overline{\vec{H}}_1)_x + i(\overline{\vec{H}}_1)_y. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Ядра  $\mathbf{W}_n$  интегралов (1.12) являются собственными функциями

$$\tilde{\mathcal{L}}^+ \mathbf{W}_n = -i\omega n \mathbf{W}_n, \quad n = 0, \pm 1. \quad (1.14)$$

сопряженного линеаризованного оператора, рассмотренного в той же системе отсчета, вращающейся вместе со спиральной волной:

$$\tilde{\mathcal{L}}^+ = \mathbf{D}\nabla^2 + \omega\partial_\theta + \left. \left( \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} \right)^+ \right|_{\mathbf{u}=\mathbf{U}(\vec{r})}. \quad (1.15)$$

Будем называть функции  $\mathbf{W}_n$  *функциями отклика* ( $\Phi$ О) спиральной волны. Аналогично Голдстоновским модам,  $\mathbf{W}_0$  определяет сдвиг во времени (или поворот в

пространстве), а  $\mathbf{W}_1$  — сдвиг в пространстве. Соответственно, мы будем для краткости называть  $\mathbf{W}_0$  временной или поворотной ФО (модой), а  $\mathbf{W}_1$  — пространственной или сдвиговой ФО (модой).

Согласно (1.12), в системе отсчета, связанной со спиральной волной, ФО не зависят от времени, т.е. являются функциями точки на плоскости.

Функции отклика являются важными характеристиками спиральной волны, поскольку определяют ее феноменологическое поведение. Известные экспериментальные и численные данные могут быть интерпретированы таким образом, что ФО должны быстро убывать с удалением от центра вращения спирали. Такое убывание гарантировало бы сходимость интегралов (1.12) даже для нелокализованных возмущений, например, вызванных одновременным изменением свойств всей среды. Однако математическая необычность этой гипотезы, подразумевающей качественно различный характер поведения собственных функций линейного оператора и его сопряженного, порождало естественный скептицизм.

Поэтому существовала точка зрения, основанная, по-видимому, опять же на интуитивной аналогии с конечномерным случаем и заключающаяся в том, что ФО не убывают вовсе, но зависят от расстояния до центра асимптотически-периодически, подобно самой спиральной волне [72]. В случае нелокализованного возмущения это приводило к необходимости искусственных регуляризующих процедур для обоснования существования интегралов (1.12) и замечаний о том, что эти интегралы таки существуют, поскольку задача всегда рассматривается в ограниченной области.

Противоположная точка зрения [55], следуя экспериментальным данным, предполагала, что ФО экспоненциально быстро убывают с удалением от ядра спиральной волны. Другими словами, спиральные волны *выглядят* как сугубо нелокальные объекты, однако *ведут себя* как локализованные.

Заметим, что в то время, как существование и даже явный вид Голдстоновских мод вытекает из симметрии задачи, это не так для ФО, и уже само их существование в общем случае является открытым вопросом. В частности, это означает, что уравнения (1.14) являются формально переопределеными, так как наличие собственных

значений  $i\omega n$  у оператора  $\tilde{\mathcal{L}}^+$  является, по существу, лишь гипотезой, не основанной ни на каких строгих математических утверждениях.

Это — лишь один из множества деликатных математических аспектов применимости описанной выше конечномерной схемы к задаче о дрейфе спиральных волн, которая далека от очевидной. Однако, если уравнения (1.14) решены, то эта аналогия предсказывает, что дрейф будет описываться “Аристотелевыми” уравнениями движения (1.8), где “силы”, вызванные возмущением, даются выражениями (1.12). Это предсказание проверяется в натурном или численном эксперименте, и такая проверка может служить проверкой разумности всей асимптотической процедуры.

### 1.3 Резюме

- Спиральные волны представляют значительный интерес как для биофизики, так и для общей теории нелинейных процессов в распределенных средах. В широком смысле, спиральные волны представляют собой характерный механизм самоорганизации в пространственно-распределенных активных системах. С точки зрения биофизики, этот механизм самоорганизации наблюдается в ряде биологических систем, и по крайней мере в некоторых из них играет существенную роль. Особое практическое значение имеют спиральные волны возбуждения в сердечной мышце.
- Поскольку математическая теория спиральных волн основана в значительной степени на численных расчетах, любые аналитические теории представляют значительный интерес, поскольку позволяют не только дать количественное предсказание поведения системы при тех или иных значениях параметров и начальных условиях, но и понять общие закономерности.
- Одним из важных свойств спиральных волн является их дрейф под влиянием малых возмущений. Аналитическая теория такого дрейфа [74], не использующая

существенным образом никаких специальных свойств системы, и тем самым — универсальная, предствляет поэтому значительный интерес как для общей теории нелинейных явлений, так и для конкретных биофизических приложений.

- Упомянутая аналитическая теория [74] основана на ряде предположений, главное из которых — существование эффективно локализованных решений у сопряженной линеаризованной задачи (функций отклика). Это предположение соответствует наблюдающему безразличию спиральных волн к малым возмущениям, удаленным от ядра спирали, и определяет своеобразие спиральных волн как формы самоорганизации.
- До сих пор, существование таких локализованных решений, не только в общем случае, но и у какой бы то ни было конкретной модели, было открытим вопросом.

## 1.4 Задачи данной работы.

Задачами данной работы были:

- Найти функции отклика в явном виде для какой-либо конкретной системы типа “реакция-диффузия”, и тем самым подтвердить или опровергнуть гипотезу об их локализации в окрестности ядра спиральной волны.
- В случае положительного ответа — проверить количественно возможность предсказания скорости дрейфа спиральной волны на основе асимптотической теории динамики спиральных волн под воздействием малых возмущений.

Обе эти задачи были выполнены. Впервые были получены в явном виде функции отклика. Это сделано для одной из простейших автоволновых моделей — комплексного уравнения Гинзбурга-Ландау (КУГЛ). Показано, что ФО существенно локализованы в окрестности ядра спиральной волны при всех значениях параметров, при которых в данной модели существуют устойчивые решения в виде спиральных волн. Таким

образом для данной модели впервые получила прямое подтверждение гипотеза [55] об экспоненциально быстрым убывании ФО с удалением от ядра спиральной волны.

Используя полученные функции отклика, впервые теоретически предсказано направление и величина скорости резонансного дрейфа спиральной волны и ее дрейфа в неоднородной среде для различных типов неоднородности. Все предсказания оказались в хорошем согласии с результатами прямых численных экспериментов, и, следовательно, асимптотическая теория динамики спиральных волн [74] также впервые получила прямое количественное подтверждение.

Комплексное уравнение Гинзбурга-Ландау – первая и пока единственная автоволновая система, для которой функции отклика найдены в явном виде. Выбор этой системы для данного исследования был обусловлен ее внутренней симметрией, позволяющей свести двумерные задачи к одномерным. Комплексное уравнение Гинзбурга-Ландау представляет двухкомпонентную систему типа “реакция-диффузия”, которая возникает во множестве приложений. В частности, это уравнение возникает естественным образом как модельная система для бифуркации Андронова-Хопфа в общей системе “реакция-диффузия”. Т.о. КУГЛ описывает автоколебательную, а не возбудимую среду, в то время как большинство электрически активных тканей в сердце являются именно возбудимыми средами. Хотя в ряде работ было показано, что автоколебательное поведение сердечной мышцы может также играть роль в фибрилляции, целью данного исследования было в первую очередь развитие метода, который в дальнейшем может быть применен к детальным моделям реальных сердечных тканей.

Дальнейшее развитие в этом направлении может иметь важные практические биомедицинские приложения, в частности, для разработки новых низковольтных дефибрилляторов и предсказания влияния различных физиологических и фармакологических факторов на стабильность спиральных волн по отношению к неоднородностям ткани.

С общей естественнонаучной точки зрения наиболее интересным представляется тот факт, что в силу впервые показанной явно локализованной чувствительности

спиральных волн к малым внешним воздействиям, их динамика может рассматриваться как динамика локализованных частиц, несмотря на то, что выглядят спиральные волны как принципиально нелокализованные объекты. Контраст между нелокализованным проявлением и бесконечной областью влияния, с одной стороны, и локализованной чувствительностью к внешним воздействиям и безразличием к удаленными от центра событиям, с другой стороны, делает спиральные волны весьма своеобразным примером самоорганизации.

## Глава 2

# Функции отклика спиральных волн в комплексном уравнении Гинзбурга-Ландау.

В данной главе излагается основной результат данной работы: метод расчета ФО для спиральных волн в комплексном уравнении Гинзбурга-Ландау. Показано, что они экспоненциально быстро убывают с удалением от ядра спиральной волны. Найдены соответствующие показатели экспонент.

Основные результаты главы опубликованы в нашей работе [5].

### 2.1 Математическая постановка задачи.

#### 2.1.1 Задача о спиральной волне.

Комплексное уравнение Гинзбурга-Ландау (КУГЛ) — двухкомпонентная система “реакция+диффузия”, которую часто записывают в комплексном виде:

$$\partial_t u = u - (1 - i\alpha)u|u|^2 + (1 + i\beta)\nabla^2 u + \varepsilon h, \quad (2.1)$$

где  $u, h \in \mathbb{C}$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .

Решение (2.1) в виде спиральной волны (1.2) во вращающейся системе отсчета имеет вид:

$$U(\vec{r}) = P(\rho)e^{i\theta}, \quad (2.2)$$

где  $P(\rho)$  — решение следующей краевой задачи:

$$(1 + i\beta) \left( P'' + \frac{1}{\rho} P' - \frac{1}{\rho^2} P \right) + (1 - i\omega - (1 - i\alpha)|P|^2) P = 0, \quad (2.3)$$

$$P(\rho \rightarrow 0) \sim \rho, \quad (2.4)$$

$$P(\rho \rightarrow \infty) \approx \sqrt{1 - k^2} \exp(i k \rho + o(\rho))(1 + o(1)). \quad (2.5)$$

Здесь  $k = k(\alpha, \beta)$  — нелинейное собственное значение, асимптотическое волновое число, а  $\omega$  — угловая скорость вращения<sup>1</sup>:

$$\omega = \alpha - \alpha k^2 - \beta k^2.$$

Задача (2.3,2.4,2.5) приводится к вещественному виду подстановкой

$$P(\rho) = a(\rho)e^{i\psi(\rho)}$$

с вещественными  $a$  и  $\psi$ . Решения этой задачи изучались, в частности, Хаганом [30].

Функциями отклика спиральной волны в уравнении (2.1) называются решения его сопряженной линеаризованной задачи во вращающейся вместе со спиральной волной системе координат. Поэтому для их нахождения необходимо сначала определить оператор  $\tilde{\mathcal{L}}^+$  для уравнения (2.1).

Однако уравнение (2.1) не совсем удобно для этой цели. При формальной его линеаризации мы не получим уравнения, линейного относительно  $u$ , но лишь уравнение, линейное относительно двух переменных:  $u$  и  $\bar{u}$ .

---

<sup>1</sup>Заметим, что отсюда вытекает, что направление групповой скорости в этой модели при положительном  $\alpha$  и малых  $k$  и  $\beta$  противоположно направлению фазовой скорости, так что “правильные” спиральные волны, т. е. такие, которые представляют собой источники с точки зрения групповой скорости — скручивающиеся, т. е. стоки с точки зрения фазовой скорости.

Асимптотическая теория, описанная в предыдущей главе, оперирует с вещественными системами. Поэтому естественно перейти к вещественной записи уравнения (2.1), введя двухкомпонентные вектора:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \operatorname{Re}(u) \\ \operatorname{Im}(u) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{h} = \begin{bmatrix} \operatorname{Re}(h) \\ \operatorname{Im}(h) \end{bmatrix}.$$

Тогда уравнение (2.1) запишется в виде:

$$\partial_t \mathbf{u} = \mathbf{u} - (\mathbf{E} - \mathbf{I}\alpha)\mathbf{u} |\mathbf{u}|^2 + (\mathbf{E} + \mathbf{I}\beta)\nabla^2 \mathbf{u} + \varepsilon \mathbf{h} \quad (2.6)$$

где  $\mathbf{I}$  — матрица:

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$\mathbf{E}$  — единичная матрица:

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

а модуль вектора определен обычным образом:

$$|\mathbf{u}|^2 = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle.$$

Мы будем работать с этой векторной записью КУГЛ.

Следует заметить, однако, что поскольку система (2.6) изоморфна уравнению (2.1), целый ряд операций над векторами и матрицами, которые будут проводиться в процессе выкладок, соответствует операциям над комплексными числами. В этом смысле до определенного предела удобно продолжать рассматривать (2.6) как эквивалент комплексного уравнения (2.1), матрицу  $\mathbf{I}$  как эквивалент мнимой единицы, вместо единичной матрицы  $\mathbf{E}$  писать для краткости просто 1 и т.д. Особая осторожность в такой интерпретации потребуется тогда, когда мы будем рассматривать комплексификацию линеаризованной задачи, поскольку нас интересуют комплексные собственные значения в (1.14). Мнимая единица  $i$ , используемая в этой комплексификации, естественно, представляет собой совершенно

иный математический объект, чем матрица  $\mathbf{I}$ , несмотря на то, что правила работы с этими объектами похожи. Поэтому выкладки, использующие оба эти объекта, являются как бы выкладками с “бикомплексными числами”, зависящими от “двух мнимых единиц”:  $i$  и  $\mathbf{I}$ . Этому приему можно придать формальный математический смысл, если установить соответствие между комплексными двухкомпонентными векторами  $\mathbf{z} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$  и  $2 \times 2$  комплексными матрицами вида  $\widehat{\mathbf{z}} = \begin{bmatrix} z_1 & -z_2 \\ z_2 & z_1 \end{bmatrix}$ <sup>2</sup>. Это соответствие устанавливается естественными правилами

$$\widehat{\mathbf{z}} = z_1 \mathbf{E} + z_2 \mathbf{I}; \quad \mathbf{z} = \widehat{\mathbf{z}} \cdot \mathbf{1},$$

где  $\mathbf{1}$  — “единичный вектор”:

$$\mathbf{1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Как уже было отмечено, существенное отличие  $\mathbf{I}$  от “истинной” мнимой единицы  $i$  заключается в том, что мы должны иметь дело с выражениями, не аналитичными по  $\mathbf{I}$ . Поэтому нам понадобится использовать в явном виде оператор комплексного сопряжения по  $\mathbf{I}$ , который по своему действию на 2-вектора представляется матрицей

$$\widehat{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Введя таким образом необходимые обозначения, можно вывести уравнения для ФО спиральной волны в КУГЛ. Невозмущенная спиральная волна (1.2), рассмотренная во вращающейся системе отсчета, в этих обозначениях имеет вид:

$$\mathbf{U}(\vec{r}) = \exp(\mathbf{I}\theta)\mathbf{P}(\rho), \quad (2.7)$$

---

<sup>2</sup>Математическим языком, такие матрицы образуют двумерную комплексную (четырехмерную вещественную) коммутативную алгебру с “двумя мнимыми единицами”, точнее, с четырьмя образующими:  $\mathbf{E} = 1$ ,  $i\mathbf{E} = i$ ,  $\mathbf{I}$  и  $i\mathbf{I}$ . Определяющие соотношения этой алгебры:  $i^2 = \mathbf{I}^2 = -1$  и  $i\mathbf{I} = \mathbf{I}i$ . В ней есть делители нуля, например,  $(i + \mathbf{I})(i - \mathbf{I}) = 0$ . Нам не удалось найти в литературе какого-либо общепринятого термина для этой алгебры.

где  $\mathbf{P}(\rho)$  — решение краевой задачи

$$(1 + \mathbf{I}\beta) \left( \mathbf{P}'' + \frac{1}{\rho} \mathbf{P}' - \frac{1}{\rho^2} \mathbf{P} \right) + (1 - \mathbf{I}\omega - (1 - \mathbf{I}\alpha)|\mathbf{P}|^2) \mathbf{P} = 0, \quad (2.8)$$

$$\mathbf{P}(\rho \rightarrow 0) \sim \rho, \quad (2.9)$$

$$\mathbf{P}(\rho \rightarrow \infty) \approx \sqrt{1 - k^2} \exp(\mathbf{I}k\rho + o(\rho))(\mathbf{1} + o(1)), \quad (2.10)$$

Задача (2.8,2.9,2.10), приводится к скалярному виду подстановкой

$$\mathbf{P}(\rho) = a(\rho) \exp(\mathbf{I}\psi(\rho)) \cdot \mathbf{1}$$

со скалярными вещественными  $a$  и  $\psi$ . Результирующие уравнения, естественно, оказываются теми же, что и при выводе с использованием исходных комплексных обозначений:

$$\begin{aligned} a'' + \frac{1}{\rho} a' + \left( 1 - a^2 - (\psi')^2 - \frac{1}{\rho^2} \right) a - \frac{\beta(\alpha + \beta)}{1 + \beta^2} (1 - a^2 - k^2) a &= 0, \\ \psi'' + \left( 2 \frac{a'}{a} + \frac{1}{\rho} \right) \psi' - \frac{\alpha + \beta}{1 + \beta^2} (1 - a^2 - k^2) &= 0. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Детали вывода системы (2.11) и соответствующих граничных условий приведены в Приложении А.1.

Решения нелинейной краевой задачи на собственные значения (2.8,2.9,2.10) при  $\alpha = 0.5$ ,  $\beta = 0$  изображены на рис. 2.2(a) (для  $a(\rho)$  и  $\psi'(\rho)$ ) и 2.3(a) и 2.4 (для  $\mathbf{U}_1(x, y)$ ). Метод решения описан в Приложении В.

### 2.1.2 Задача о функциях отклика.

Сопряженный линеаризованный оператор (1.15) для спиральной волны в КУГЛ имеет вид:

$$\tilde{\mathcal{L}}^+ = 1 - 2a^2(1 + \mathbf{I}\alpha) - a^2 e^{2\mathbf{I}\psi} e^{2\mathbf{I}\theta} (1 - \mathbf{I}\alpha) \hat{\mathbf{C}} + \omega \partial_\theta + (1 - \mathbf{I}\beta) \nabla^2 \quad (2.12)$$

(см. подробный вывод в Приложении А.2).

Покажем, что в силу симметрии задачи, можно выписать зависимости ФО от угла в явном виде:

$$\mathbf{W}_n(\rho, \theta) = e^{(\mathbf{I}-in)\theta} \mathbf{Q}_n(\rho), \quad n = 0, \pm 1 \quad (2.13)$$

где  $\mathbf{Q}_0(\rho)$ ,  $\mathbf{Q}_1(\rho)$ , — бикомплексные функции подлежащие определению. Действительно, дифференцируя (2.13), получим:

$$\begin{aligned}\partial_\theta \mathbf{W}_n &= (\mathbf{I} - in) \mathbf{W}_n, \\ \partial_\rho \mathbf{W}_n &= \exp\{(\mathbf{I} - in)\theta\} \frac{d\mathbf{Q}_n}{d\rho}, \\ \widehat{\mathbf{C}} \mathbf{W}_n &= \widehat{\mathbf{C}} e^{\mathbf{I}\theta} e^{-in\theta} \mathbf{Q}_n = e^{-\mathbf{I}\theta} e^{-in\theta} \widehat{\mathbf{C}} \mathbf{Q}_n,\end{aligned}$$

Тогда с учетом (2.12) уравнение (1.14) для ФО принимает вид:

$$\begin{aligned}-i\omega n \exp((\mathbf{I} - in)\theta) \mathbf{Q}_n(\rho) &= \\ = [1 - 2a^2(1 + \alpha\mathbf{I})] \exp((\mathbf{I} - in)\theta) \mathbf{Q}_n(\rho) &- \\ - a^2 e^{2\mathbf{I}\psi} e^{2\mathbf{I}\theta} (1 - \mathbf{I}\alpha) e^{-\mathbf{I}\theta} e^{-in\theta} \widehat{\mathbf{C}} \mathbf{Q}_n(\rho) &+ \omega(\mathbf{I} - in) \exp((\mathbf{I} - in)\theta) \mathbf{Q}_n(\rho) + \\ +(1 - \mathbf{I}\beta) \cdot & \\ \cdot \left[ \exp((\mathbf{I} - in)\theta) \frac{d^2 \mathbf{Q}_n}{d\rho^2} \exp((\mathbf{I} - in)\theta) \frac{1}{\rho} \frac{d\mathbf{Q}_n}{d\rho} \frac{1}{\rho^2} (\mathbf{I} - in)^2 \exp((\mathbf{I} - in)\theta) \mathbf{Q}_n \right].\end{aligned}$$

Оказывается, что зависимость от угла через множитель  $\exp((\mathbf{I} - in)\theta)$  у всех членов — общая. После сокращения на этот множитель остается только уравнение для  $\mathbf{Q}_n(\rho)$ :

$$\begin{aligned}(1 - \mathbf{I}\beta) \left\{ \mathbf{Q}_n'' + \frac{1}{\rho} \mathbf{Q}_n' + \frac{(\mathbf{I} - in)^2}{\rho^2} \mathbf{Q}_n \right\} \\ + \left\{ 1 + \mathbf{I}\omega - a^2 \left[ 2(1 + \mathbf{I}\alpha) + (1 - \mathbf{I}\alpha) e^{2\mathbf{I}\psi} \widehat{\mathbf{C}} \right] \right\} \mathbf{Q}_n = 0.\end{aligned}\quad (2.14)$$

Мы получили систему обыкновенных уравнений для  $\mathbf{Q}_n(\rho)$  вместо исходной двумерной системы в частных производных для  $\mathbf{W}_n(\rho, \theta)$ .

Систему уравнений (2.14) нужно дополнить граничными условиями: ограниченности при малых радиусах,

$$|\mathbf{Q}_n(\rho \rightarrow 0)| < \infty, \quad (2.15)$$

и убывания при больших радиусах,

$$\mathbf{Q}_n(\rho \rightarrow \infty) \rightarrow 0. \quad (2.16)$$

Напомним, что  $\mathbf{W}_0$  и  $\mathbf{Q}_0$  — I-комплекснозначные функции, т.е. вещественные двухкомпонентные вектора, а  $\mathbf{W}_1$  и  $\mathbf{Q}_1$  — бикомплексно-значные функции, т.е. имеют каждая четыре компоненты.

Задачи (2.14, 2.15, 2.16) были приведены к вещественной скалярной форме подстановками

$$\mathbf{Q}_0 = (A + \mathbf{I}B) \exp(\mathbf{I}\psi) \mathbf{1}, \quad (2.17)$$

$$\mathbf{Q}_1 = (C + \mathbf{I}D + iE + i\mathbf{F}) \exp(\mathbf{I}\psi) \mathbf{1}, \quad (2.18)$$

что дало две системы уравнений: систему двух уравнений второго порядка для  $A$  и  $B$  и систему четырех уравнений второго порядка для  $C, D, E$  и  $F$ . Подробности см. в Приложении A.3 и A.4.

## 2.2 Метод решения.

Поведение любого решения системы (2.14)  $\mathbf{Q}_n$  при  $\rho \rightarrow \infty$  описывается, с точностью до предэкспоненциального множителя, зависимостью

$$\mathbf{Q}_n(\rho) \sim e^{\Lambda\rho}, \quad (2.19)$$

где  $\Lambda = \Lambda(\alpha, \beta, k(\alpha, \beta))$  — ноль либо корень кубического уравнения

$$\Lambda^3 + p\Lambda + q = 0, \quad (2.20)$$

где

$$\begin{aligned} p &= 2 \frac{\alpha\beta - 1 + k^2(3 + 2\beta^2 - \alpha\beta)}{1 + \beta^2}, \\ q &= -4k \frac{(\alpha + \beta)(1 - k^2)}{1 + \beta^2}, \end{aligned} \quad (2.21)$$

Требование (2.16) убывания ФО при  $\rho \rightarrow \infty$ , таким образом, автоматически подразумевает экспоненциальное убывание, которое в типичной ситуации будет соответствовать корню уравнения (2.20) с отрицательной и наименьшей по

абсолютной величине действительной частью. Далее будем называть этот корень  $\Lambda$  *главным*. Именно этот корень определяет поведение  $\mathbf{Q}_n$  на больших радиусах. В дальнейшем, если не оговорено противное,  $\Lambda$  будет означать именно этот корень.

Анализ поведения возможных решений уравнения (2.14) при  $\rho \rightarrow 0$  и  $\rho \rightarrow \infty$  (подробности см. в Приложении A.3) показывает, что требования (2.15) и (2.16) делают задачу (2.14,2.15,2.16) формально переопределенной. Это обстоятельство естественно, так как фактически система (2.14,2.15,2.16) — другая формулировка задачи на собственные значения (1.14) в пространстве функций, убывающих на бесконечности, а наличие собственных значений  $i\omega n$  у этой задачи — всего лишь гипотеза. Чтобы сделать эти задачи пригодными для численного исследования, они были переформулированы явно как задачи на собственные значения, что соответствует тому, что вместо (1.14) рассматривались системы

$$\tilde{\mathcal{L}}^+ \mathbf{W}_n = (-i\omega n + \lambda_n) \mathbf{W}_n, \quad n = 0, 1. \quad (2.22)$$

где

$$\lambda_0 \in \mathbb{R} \quad (\text{для временной ФО})$$

и

$$\lambda_1 = \lambda_r + i\lambda_i \in \mathbb{C} \quad (\text{для пространственной ФО})$$

— подлежащие нахождению собственные значения, причем ожидается, что они окажутся малы. Фактическая малость этих искусственных параметров в найденном решении рассматривалась как дополнительный критерий точности численной процедуры, помимо обычных критериев сходимости в зависимости от параметров численных расчетов.

Полубесконечный интервал  $\rho \in [0, +\infty)$  был заменен конечным интервалом  $\rho \in [0, \rho_{\max}]$ . Были наложены граничные условия:

$$A(0) = B(0) = C'(0) = D'(0) = 0,$$

$$E(0) = D(0),$$

$$F(0) = -C(0),$$

$$\mathbf{Q}'_n(\rho_{\max}) = -|\Lambda| \mathbf{Q}_n(\rho_{\max}) \quad (\text{для случая вещественного } \Lambda),$$

основываясь на условиях (2.15, 2.16, 2.19), используя асимптотики допустимых решений системы ОДУ (2.14). Чтобы выбрать единственное решение у полученных однородных систем, мы добавляли условие

$$B'(0) = C(0) = D(0) = 1,$$

и затем нормировали решения согласно (1.5). Детали численной процедуры описаны в Приложении В.

## 2.3 Результаты.

Полученные таким образом краевые задачи на собственные значения изучались в двойном пределе по двум численным параметрам: радиусу обрезания  $\rho_{\max} \rightarrow \infty$  и шагу дискретизации  $\Delta\rho \rightarrow 0$ . Численная аппроксимация была второго порядка по  $\Delta\rho$ , а искомое решение должно экспоненциально убывать при  $\rho \rightarrow \infty$ . Следовательно, ожидаемое поведение малых собственных значений есть

$$\lambda_0, \lambda_r, \lambda_i = O(\Delta\rho^2 + \exp(-|\operatorname{Re}(\Lambda)|\rho_{\max})) , \quad \Delta\rho \rightarrow 0, \rho_{\max} \rightarrow \infty. \quad (2.23)$$

Это вполне согласуется с результатами расчетов. На рис. 2.1 показана зависимость фиктивных собственных значений  $\lambda_{0,1}$  от  $\Delta\rho$  в логарифмических, а от  $\rho_{\max}$  в полулогарифмических координатах. Линейность графиков этих зависимостей соответствует асимптотикам (2.23). Мы рассматриваем это как численное “доказательство” существования решений переопределенных задач (2.14, 2.15, 2.16). Сами решения показаны на рис. 2.2(b,c). Видно, что как пространственная, так и временная ФО действительно быстро затухают и существенно отличаются от нуля лишь в ядре спиральной волны.

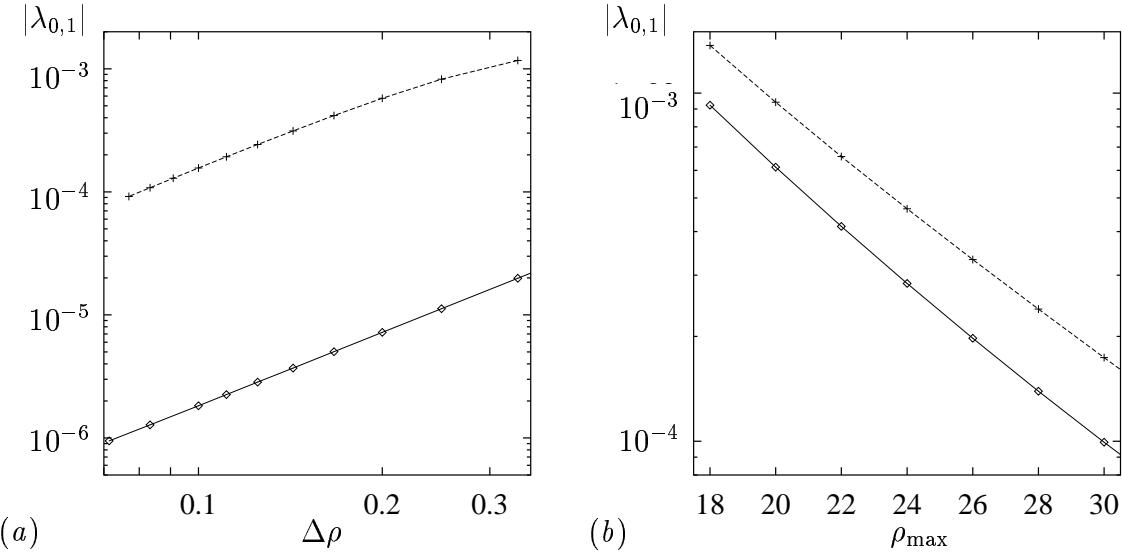


Рис. 2.1: Абсолютные величины собственных значений  $|\lambda_0|$  ( $\diamond$ ) и  $|\lambda_1|$  (+) как функции  
(a) шага дискретизации  $\Delta\rho$ , при  $\rho_{\max} = 100$ , и (b) радиуса обрезания  $\rho_{\max}$  при  $\Delta\rho = 0.05$ . ( $\alpha = 0.5$ ,  $\beta = 0$ )

Реконструированные ФО на плоскости  $(x, y)$  изображены на рис. 2.3(*b,c,d*) и 2.4. Показаны лишь первые (**I**-вещественные) компоненты; вторые (**I**-мнимые) компоненты тождественны первым, повернутым в плоскости  $(x, y)$  на угол  $\pi/2$ .

## 2.4 Выводы

- Полученные результаты подтверждают существование эффективно локализованных решений сопряженной линеаризованной задачи (функций отклика). Хотя строгое математическое доказательство этого факта, по-прежнему, — открытый вопрос, мы получили то, что можно рассматривать как “численное” доказательство. В частности, мы не только получили искомые решения с определенной точностью, но и продемонстрировали, что при изменении расчетных параметров эта точность улучшается в полном соответствии с порядком аппроксимации численной процедуры.

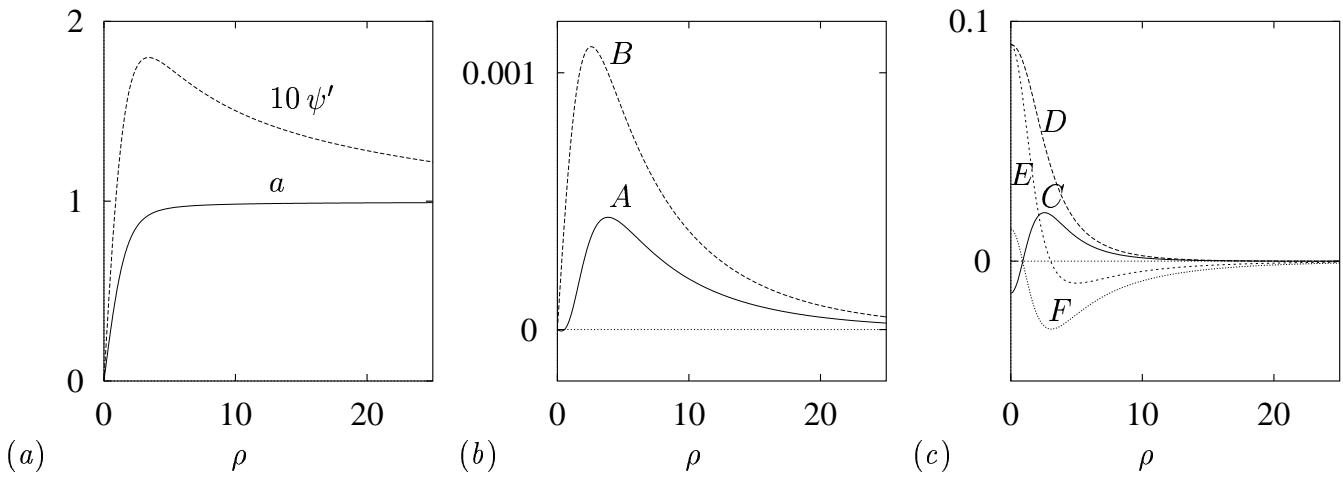


Рис. 2.2: (a) решение нелинейной краевой задачи, (b) компоненты временнй ФО, (c) компоненты пространственной ФО, как функции  $\rho$  ( $\alpha = 0.5$ ,  $\beta = 0$ ).

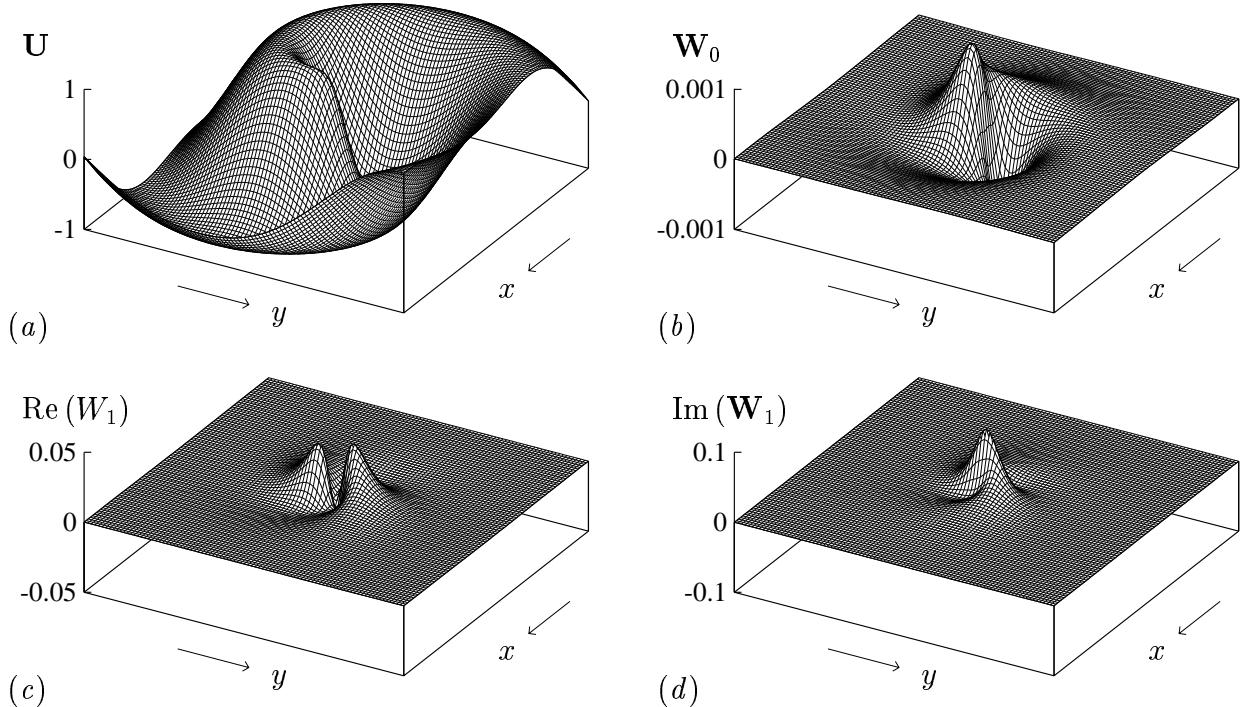


Рис. 2.3: (a) Спиральная волна  $U$ , (b) временная ФО  $W_0$ , (c) вещественная часть пространственной ФО  $\text{Re}(W_1)$ , (d) мнимая часть пространственной ФО  $\text{Im}(W_1)$ , как функции точки на плоскости. Шаг спиральной волны около 67;  $(x, y) \in [-30, 30] \times [-30, 30]$ ,  $\alpha = 0.5$ ,  $\beta = 0$ .

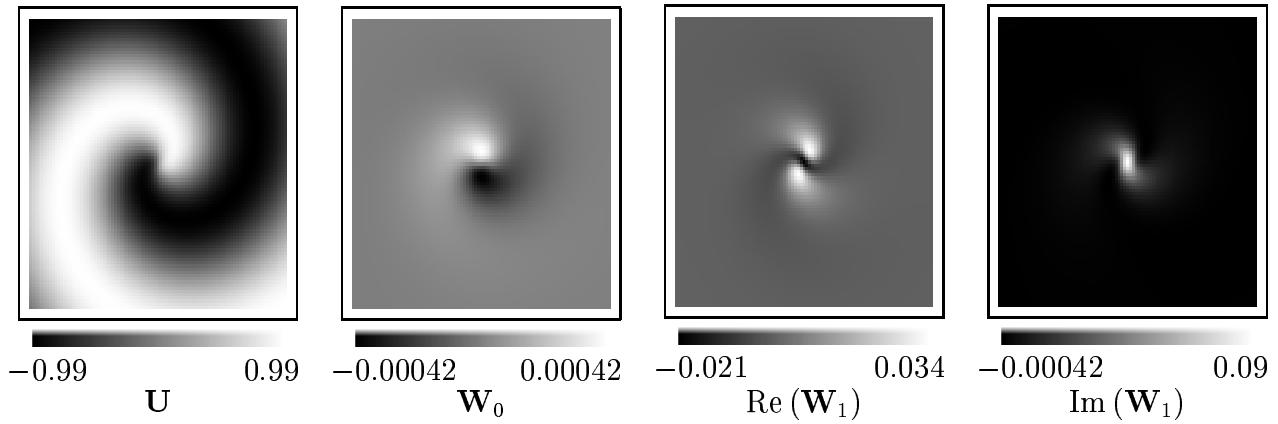


Рис. 2.4: Спиральная волна ( $\mathbf{U}$ ), временная ФО ( $\mathbf{W}_0$ ) и  $i$ -вещественная и  $i$ -мнимая части пространственной ФО ( $\mathbf{W}_1$ ), изображенные как градации серого цвета на плоскости ( $\alpha = 0.5$ ,  $\beta = 0$ ). Показаны только I-вещественные компоненты всех четырех функций; I-мнимые получаются поворотом I-вещественных на угол  $\pi/2$ . На этом и последующих рисунках показана пространственная область  $(x, y) \in [-20, 20] \times [-20, 20]$ . Однородный серый цвет на периферии  $\mathbf{W}_{0,1}$  соответствует нулю, т.е. все ФО локализованы вблизи центра вращения.

- Хотя сами ФО находятся численно, декремент их затухания и период осцилляций, определяемые главным корнем характеристического уравнения (2.20)  $\Lambda$ , находятся аналитически, если известно асимптотическое волновое число  $k$  невозмущенной спирали. Это обстоятельство может быть эффективно использовано при качественном анализе, как это будет продемонстрировано в следующей главе.

# Глава 3

## Зависимость функций отклика от параметров.

В этой главе мы рассмотрим зависимость ФО от параметров модели  $\alpha$  и  $\beta$ . Основные результаты этой главы опубликованы в нашей работе [2].

### 3.1 Методы.

Уравнение (2.1) очевидным образом инвариантно относительно преобразования  $\alpha \mapsto -\alpha$ ,  $\beta \mapsto -\beta$ ,  $u \mapsto \bar{u}$ ,  $h \mapsto \bar{h}$ . Следовательно, параметрический портрет КУГЛ на плоскости  $(\alpha, \beta)$  обладает центральной симметрией, и без ограничения общности можно ограничиться рассмотрением  $\alpha \geq 0$ .

Краевые задачи (2.8,2.9,2.10) и (2.14,2.15,2.16) решались численно, используя процедуру, описанную в предыдущей главе, и метод продолжения по параметру как для  $\alpha$ , так и для  $\beta$ . Расчеты в этой главе проводились на интервале  $\rho \in [0 : 50]$  с шагом дискретизации  $\Delta\rho = 0.07$ .

Существование локализованных ФО считалось установленным, если абсолютные значения искусственных собственных значений  $\lambda_0, \lambda_1$  оказывались меньше, чем  $10^{-3}$ .

## 3.2 Результаты.

### 3.2.1 Существование ФО при разных параметрах.

Исследованная область на плоскости параметров показана на рис. 3.1. Точки на графике показывают значения  $\alpha$  и  $\beta$ , для которых проводились вычисления, и существование локализованных ФО подтверждено. По причинам, описанным ниже, расчеты вблизи линии  $\alpha + \beta = 0$  сопряжены с дополнительными трудностями, поэтому исследованных точек в этой области меньше. Расчеты при больших  $\alpha$  и  $\beta$ , чем изображено на рис. 3.1 не проводились, поскольку известно, что в этой области решения в виде спиральных волн неустойчивы [30, 78], и, следовательно, ставить вопрос об их медленной динамике нет смысла.

Решения, соответствующие некоторым избранным точкам из числа исследованных, показаны на последующих рисунках (точка  $(0.5, 0)$  была проиллюстрирована выше).

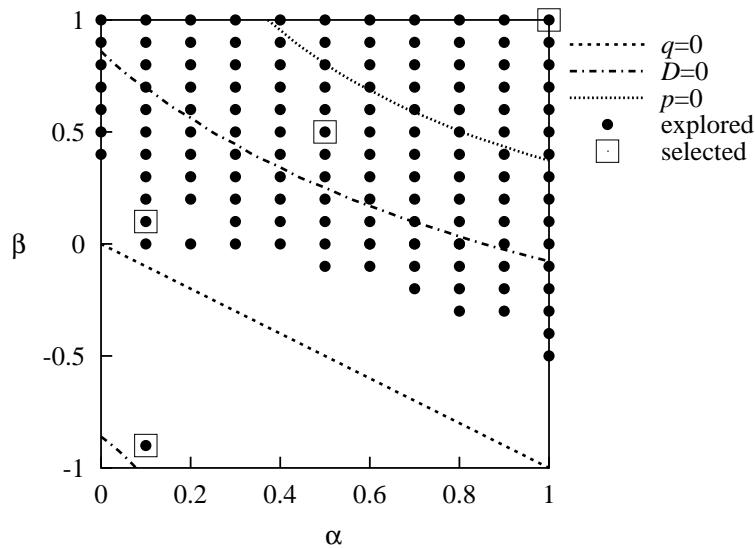


Рис. 3.1: Исследованная область на плоскости  $(\alpha, \beta)$ .

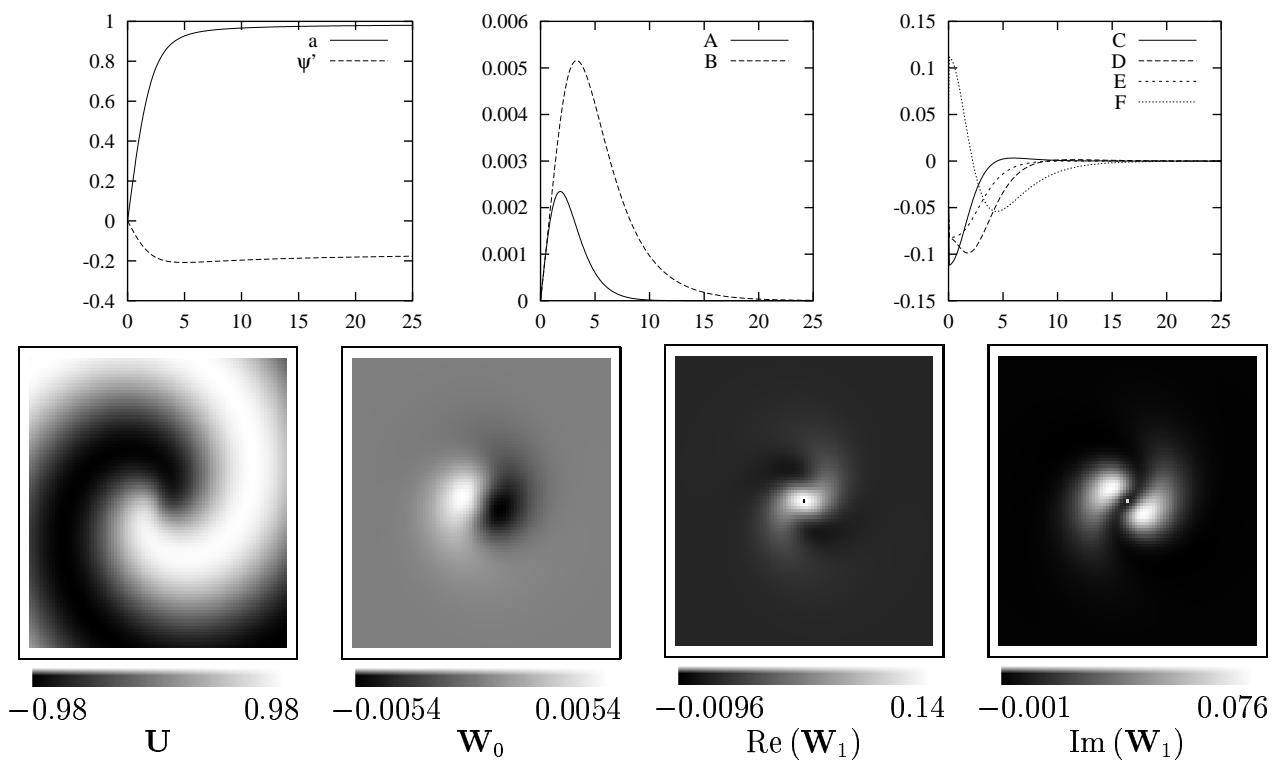


Рис. 3.2: Спиральная волна и ФО ( $\alpha = 0.1$ ,  $\beta = -0.9$ ).

### 3.2.2 Смена направления вращения спиралей

Как уже обсуждалось в предыдущей главе, если  $\mathbf{Q}_n$  убывают при  $\rho \rightarrow \infty$ , то это убывание — экспоненциальное, и скорость его определяется корнем кубического уравнения (2.20,2.21) с наименьшей по абсолютной величине отрицательной действительной частью.

Задача о ФО корректно поставлена, если (2.20) имеет один положительный корень и два корня с отрицательной действительной частью (см. Приложения А.3 и А.4).

Это требование выполняется всюду, где  $|k(\alpha, \beta)| < 1$ , за исключением прямой  $\alpha + \beta = 0$ , на которой один из корней (2.20) обращается в ноль. При пересечении линии  $\alpha + \beta = 0$  знак  $k$  меняется на противоположный, поэтому направление закрутки спирали на рис. 3.2 другое, чем на следующих четырех рисунках. Это обстоятельство само по себе никак не сказывается на характере поведения ФО. Однако вблизи линии  $\alpha + \beta = 0$  наблюдаются характерные явления, которые заслуживают более подробного обсуждения, см. следующий раздел.

### 3.2.3 Делокализация ФО при больших длинах волн спирали

На линии  $\alpha + \beta = 0$  уравнение (2.6) “вырождается” в следующем смысле: если  $\beta = -\alpha$ , то заменой  $\mathbf{u} = \tilde{\mathbf{u}}e^{\mathbf{I}\alpha t}$  это уравнение (при  $\epsilon \mathbf{h} = 0$ ) приводится к виду

$$\partial_t \tilde{\mathbf{u}} = (1 - \mathbf{I}\alpha) [\tilde{\mathbf{u}} - \tilde{\mathbf{u}} |\tilde{\mathbf{u}}|^2 + \nabla^2 \tilde{\mathbf{u}}] = -(1 - \mathbf{I}\alpha) \frac{\delta V}{\delta \tilde{\mathbf{u}}} \quad (3.1)$$

где функционал  $V[\tilde{\mathbf{u}}]$  дается выражением

$$V[\tilde{\mathbf{u}}](t) = \iint_{\mathbb{R}^2} \left( -\frac{1}{2} |\tilde{\mathbf{u}}|^2 + \frac{1}{4} |\tilde{\mathbf{u}}|^2 + \frac{1}{2} |\nabla \tilde{\mathbf{u}}|^2 \right) d^2 \vec{r}, \quad (3.2)$$

т.е. следуя терминологии, предложенной в работе [79], это уравнение можно назвать “квази-градиентным” (при  $\alpha = 0$ , это уравнение — просто градиентное, и функционал  $V$  является функцией Ляпунова).

Поведение вращающихся решений на линии  $\alpha + \beta = 0$  и вблизи нее было разобрано в работе Хагана [30]. Стационарно вращающиеся решения (1.2) при

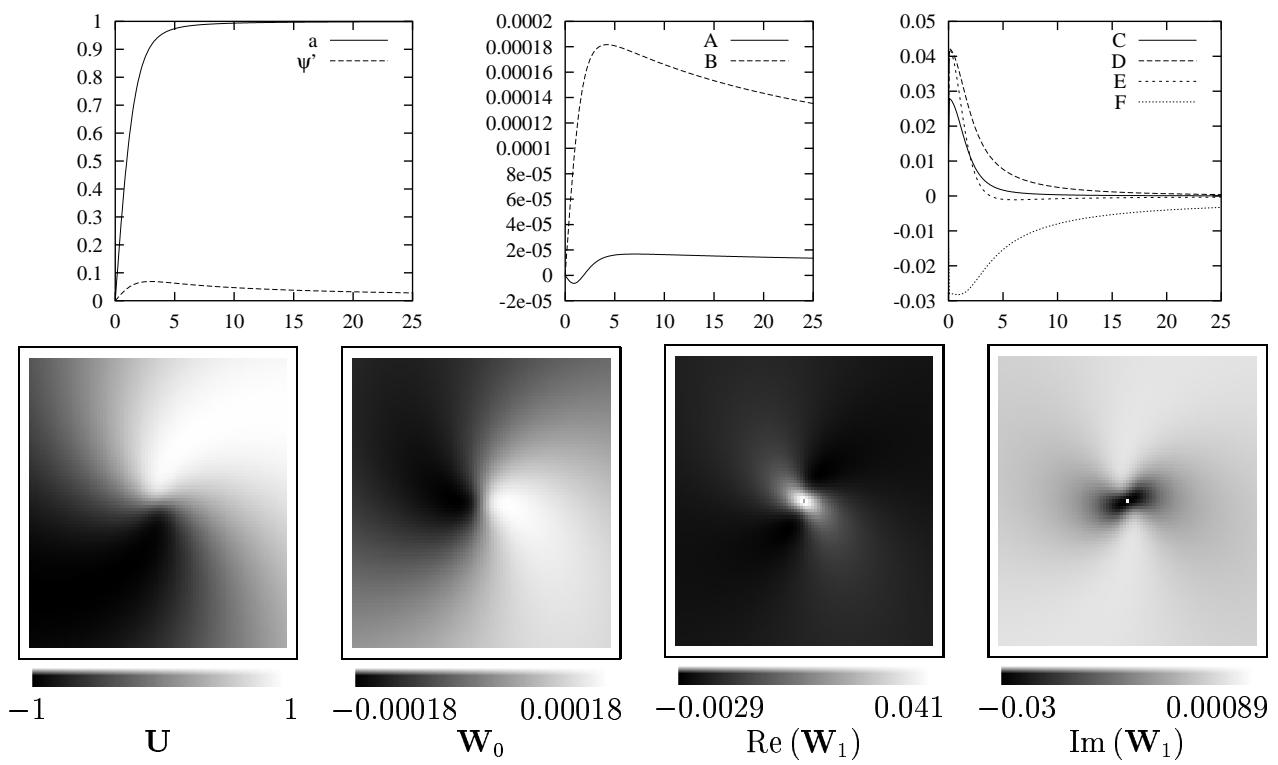


Рис. 3.3: Спиральная волна и ФО ( $\alpha = 0.1$ ,  $\beta = 0.1$ ).

$\alpha + \beta = 0$  перестают иметь вид спиралей, поскольку асимптотическое волновое число  $k$  обращается в 0. Уравнение для радиальной части  $\mathbf{P}$  решения  $\mathbf{U}$  приобретает вид уравнения Гринберга [80]:

$$\mathbf{P}'' + \frac{1}{\rho} \mathbf{P}' + \left(1 - \frac{1}{\rho^2} - |\mathbf{P}|^2\right) \mathbf{P} = 0, \quad (3.3)$$

имеющего скалярное решение ( $\psi \equiv \text{const}$ ), и линии равных фаз имеют не вид спиралей, а прямых, проходящих через центр.

Вблизи линии  $\alpha + \beta = 0$ , асимптотическое волновое число  $k$  спирали экспоненциально быстро убывает, так что, например, при  $\beta = 0$ ,

$$k = k_H \approx \frac{2}{\alpha} \exp \left\{ -\frac{\pi}{2\alpha} - \gamma + C_1 \right\},$$

где  $\gamma = 0.5772\dots$  — постоянная Эйлера-Маскерони, а  $C_1 \approx -0.098\dots$  — константа, найденная численно (может быть определена через несобственный интеграл, зависящий от решения уравнения Гринберга). При значениях  $\rho$  в интервале  $1 \ll \rho \ll k^{-1}$  спираль имеет логарифмическую, а не Архimedову форму. Главный корень  $\Lambda$  характеристического уравнения (2.20) в этом случае становится очень малым,

$$\Lambda \sim -(\alpha + \beta)k,$$

где асимптотическое волновое число  $k$ , в свою очередь, экспоненциально мало по малому параметру  $(\alpha + \beta)$ . Это затрудняет расчеты спиральной волны и ФО вблизи этой линии.

Квази-градиентный характер КУГЛ на линии  $\alpha + \beta = 0$  накладывает особенности на поведение линеаризованных задач.<sup>1</sup> Так, например, можно видеть, что при  $\beta = -\alpha$ ,  $k = 0$ ,  $\psi \equiv 0$ ,  $\omega = \alpha$ , уравнение для ФО (2.14) приобретает вид

$$\left\{ \partial_\rho^2 + \frac{1}{\rho} \partial_\rho + \frac{(\mathbf{I} - in)^2}{\rho^2} + 1 - 2a^2 \right\} (1 + \mathbf{I}\alpha) \mathbf{Q}_n - a^2 \widehat{\mathbf{C}} (1 + \mathbf{I}\alpha) \mathbf{Q}_n = 0. \quad (3.4)$$

---

<sup>1</sup>Идущее далее рассуждение о сравнении поведения ФО и Голдстоновских мод при малых  $\alpha + \beta$  принадлежит В.Н. Бикташеву и приводится здесь для полноты изложения.

При замене  $(1 + \mathbf{I}\alpha)\mathbf{Q}_n = \tilde{\mathbf{Q}}_n$  уравнение (3.4) перестает зависеть от  $\alpha$  (заметим, что решение невозмущенной задачи  $a(\rho)$  также не зависит от  $\alpha$ , в силу (3.3)), и главное — совпадает с уравнением для радиальной части Голдстоновских мод. Другими словами, интересующие нас решения (3.4) имеют вид

$$\mathbf{Q}_0(\rho) = \frac{\mathbf{I}}{1 + \mathbf{I}\alpha} \mathbf{P}(\rho), \quad \mathbf{Q}_1(\rho) = \frac{1}{1 + \mathbf{I}\alpha} \left[ \mathbf{P}'(\rho) + \frac{i}{\rho} \mathbf{P}(\rho) \right] \quad (3.5)$$

(в чем можно удостовериться прямой подстановкой при учете (3.3)), т. е. ФО отличаются от Голдстоновских мод на постоянный матричный множитель  $(1 + \mathbf{I}\alpha)^{-1}$ .

Следовательно, вблизи линии  $\alpha + \beta = 0$  можно ожидать, что ФО  $\mathbf{W}_n$  будут похожи, с точностью до постоянного матричного множителя, на Голдстоновские моды  $\mathbf{V}_n$ , по крайней мере, при не очень больших  $\rho$ . Из [30] известно, что при малых  $\alpha + \beta$  в области  $1 \ll \rho \ll k^{-1}$  амплитуда  $\mathbf{V}_0$  остается приближенно постоянной, как и амплитуда  $\mathbf{U}$ , в то время как  $\mathbf{V}_1$  убывает как  $\rho^{-1}$ .

Из вышесказанного следует, что такого же поведения можно ожидать и от ФО. Это ожидание полностью оправдывается полученными результатами, проиллюстрированными на рис. 3.3. Действительно, амплитуда временной ФО вне ядра спирали оказывается приближенно постоянной, а амплитуда пространственной ФО убывает не очень быстро.

### 3.2.4 Переход от монотонных к осциллирующим ФО.

Характер убывания ФО при больших  $\rho$  качественно меняется в зависимости от поведения корней характеристического уравнения (2.20). Если все корни вещественны, то убывание будет монотонным. Если имеется один вещественный корень и два комплексных корня с отрицательной действительной частью, то убывание будет колебательным. На плоскости  $(\alpha, \beta)$  эти два случая отделены линией, на которой обращается в ноль дискриминант кубического уравнения (2.20),

$$D \equiv (p/3)^3 + (q/2)^2 = 0.$$

Эта линия также показана на рис. 3.1.

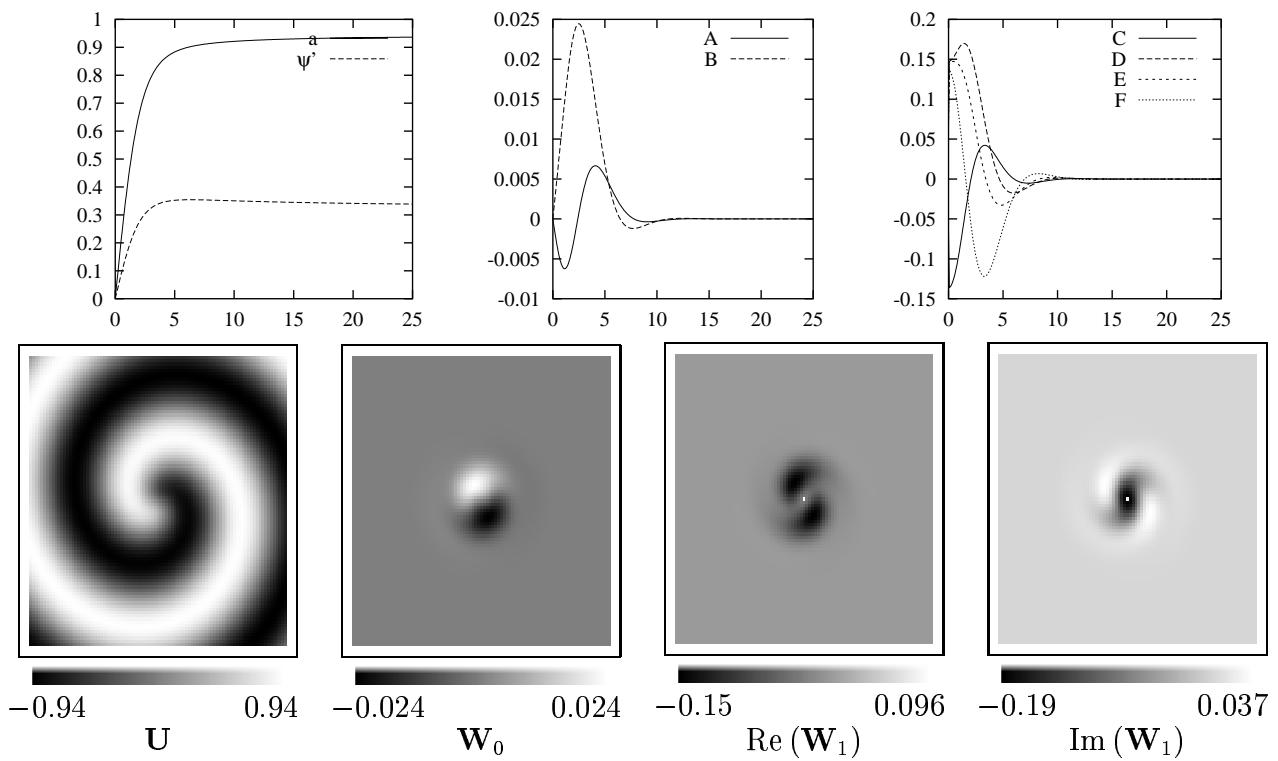


Рис. 3.4: Спиральная волна и ФО ( $\alpha = 0.5$ ,  $\beta = 0.5$ ).

Рис. 3.4 иллюстрирует случай колебательного убывания ФО. Видно качественное отличие в форме ФО, усиленное более медленным затуханием (меньшим значением  $|Re(\Lambda)|$ ). В то время, как ФО на рис. 3.2 были локализованы практически в пределах самого кончика спирали, ФО на рис. 3.4 заметны на протяжении всего первого витка.

Другая новая черта — “гало”, область вокруг внутреннего ядра, в которой ФО имеют противоположный знак (особенно хорошо видная на рис. 3.5). Эта черта позволяет предсказать качественное изменение поведения спиралей вблизи контрастных неоднородностей или локализованных внешних воздействий по разные стороны от линии  $D = 0$  на плоскости параметров. Например, специфическое “заякоривание” спиральных волн вблизи неоднородностей определенного типа. При гладких возмущениях разницы в поведении спиралей заметно не будет.

### 3.2.5 Линия Экхаузовой неустойчивости.

Еще одна особая линия на плоскости  $(\alpha, \beta)$  — линия неустойчивости Экхауза, при которой асимптотически плоские волны, излучаемые спиральной волной, становятся экспоненциально неустойчивы по отношению к длинноволновым продольным модуляциям. Можно показать, что условие наступления этой неустойчивости совпадает с обращением в ноль линейного коэффициента характеристического уравнения (2.20),

$$p(\alpha, \beta, k(\alpha, \beta)) = 0.^2$$

Поскольку за этой линией плоские волны, излучаемые спиралью, экспоненциально неустойчивы, то, строго говоря, спиральные волны в бесконечной среде также должны быть неустойчивы. Однако, как видно из рис. 3.5, локализованные ФО продолжают существовать и в этой области, хотя их пространственная протяженность продолжает возрастать.

---

<sup>2</sup>Во многих работах опубликовано условие неустойчивости Экхауза для КУГЛ, отличающееся от  $p = 0$ , где  $p$  дается (2.21). Характер этого отличия позволяет предположить, что это — опечатка, кочующая из одной публикации в другую.

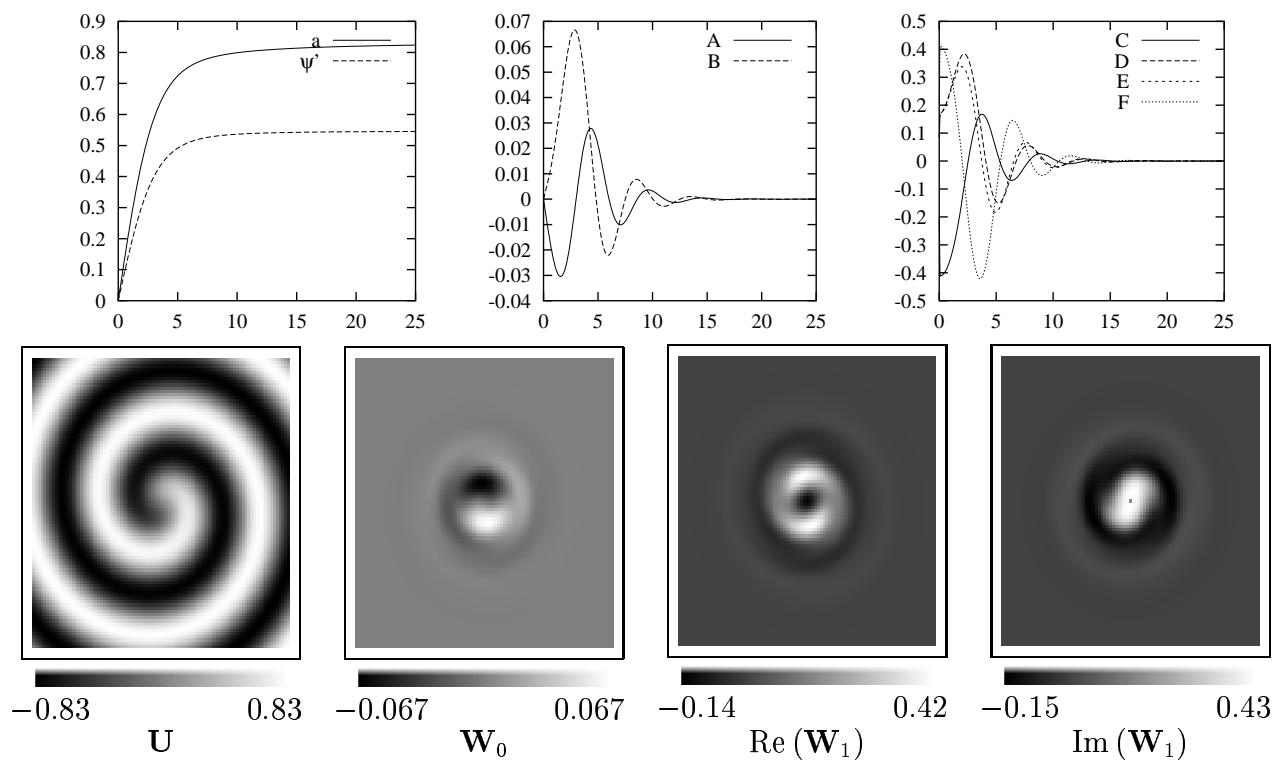


Рис. 3.5: Спиральная волна и ФО ( $\alpha = 1$ ,  $\beta = 1$ ).

### 3.3 Выводы

- Полученные результаты показывают, что локализация ФО в окрестности ядра спиральной волны есть универсальное свойство спиральных волн в рассматриваемой модели, по крайней мере в изученной области параметров.
- Локализация ФО ослабевает только вблизи линии, на которой растет асимптотическая длина волны, и за линией неустойчивости Экхаза — вблизи области абсолютной неустойчивости и турбулентности. Это наблюдение, хотя и не является окончательным, все же свидетельствует в пользу той точки зрения, что ФО остаются локализованными до тех пор, пока спиральные волны продолжают существовать и оставаться устойчивыми.
- Изменения в поведении спиральных волн коррелируют с изменениями в форме ФО. Приближение к специальным областям на плоскости параметров, таких как область абсолютной неустойчивости или линия вырождения спиральной волны  $\alpha + \beta = 0$ , сопровождается характерными изменениями в форме ФО.
- Таким образом, ФО могут быть использованы для предсказания качественно нового поведения спиральных волн. Например, “гало” вокруг центральной области ФО, появляющееся в области параметров за линией  $D = 0$ , может означать особое поведение спиральных волн с этими параметрами в окрестности контрастной неоднородности. Примером такого поведения может быть “заякоривание” спиралей.

# Глава 4

## Резонансный дрейф.

### 4.1 Теория явления.

Одним из приложений описанной выше асимптотической теории динамики спиральных волн под воздействием малых возмущений является изучение резонансного дрейфа спиральных волн.

Явление резонансного дрейфа было впервые предсказано в работе [58] на основе “кинематического” описания спиральных волн, применимого для некоторого специального класса возбудимых сред, и затем продемонстрировано экспериментально в светочувствительной модификации реакции Белоусова-Жаботинского [76]. Оно состоит в следующем: если параметры среды периодически меняются во времени с периодом, близким к периоду вращения спиральной волны, то последняя дрейфует по кругу большого радиуса или вдоль прямой линии, если эти два периода совпадают. Существует простое объяснение этого эффекта: если внешние толчки приходят в одну и ту же фазу вращения спирали, они вызывают ее сдвиги в одном и том же направлении. С этой точки зрения явление резонансного дрейфа не должно ограничиваться каким-либо специальным классом возбудимых сред, но, поскольку оно есть прямое следствие симметрии спиральной волны, то должно быть универсально для всех моделей.

В рамках общей теории[74], кратко представленной во введении, явление резонансного дрейфа описывается следующим образом. Если возмущение  $\mathbf{h}$  однородно в пространстве и периодично во времени,

$$\mathbf{h}(\mathbf{u}, \vec{r}, t) = \mathbf{h}(t) \equiv \mathbf{h}(t + 2\pi/\Omega), \quad (4.1)$$

с частотой  $\Omega$ , близкой к собственной частоте вращения спиральной волны,  $\Omega \approx \omega$ , то уравнения дрейфа (1.8) сводятся к

$$\begin{aligned} \partial_t \phi &= \Omega - \omega - \epsilon H_0, \\ \partial_t(X + iY) &= \epsilon e^{i\phi} H_1, \end{aligned} \quad (4.2)$$

где  $\phi = \phi(t)$  — разность между фазой (ориентацией) спиральной волны и мгновенной фазой внешней стимуляции:

$$\phi = \Omega t - \bar{\Theta},$$

а

$$H_n = \left\langle \iint_{\mathbb{R}^2} \mathbf{W}_n d^2 \vec{r}, \oint e^{-in\Omega\tau} \mathbf{h}(\tau) \frac{\Omega d\tau}{2\pi} \right\rangle, \quad n = 0, 1. \quad (4.3)$$

Решением уравнений (4.2) является дрейф по кругу:

$$X + iY = X_c + iY_c + R_d e^{i\delta t}, \quad (4.4)$$

где

$$\delta = \Omega - \omega - \epsilon H_0,$$

$$R_d = |\epsilon H_1 / \delta|.$$

Если разность частот мала или ноль, то дрейф происходит по кругу большого радиуса или по прямой, как и в первоначальной модели [58].

В частности, если частота внешнего возмущения в точности совпадает с собственной частотой невозмущенной спирали,  $\Omega = \omega$ , то радиус круга оказывается равным

$$R_d \approx |H_1 / H_0|.$$

Если же  $H_0$  равно нулю, как в примере, разбираемом ниже, то необходимо принимать во внимание члены следующего порядка, тогда  $\delta = O(\epsilon^2)$  и

$$R_d = O(\epsilon^{-1}). \quad (4.5)$$

Линейная скорость дрейфа при этом остается

$$|\partial_t R| \approx |\epsilon H_1| = O(\epsilon). \quad (4.6)$$

В работе [74] резонансный дрейф спиральных волн был предложен как возможный механизм для разработки низковольтных дефибрилляторов. Идея состояла в том, что если уж резонансный дрейф наблюдается, хотя бы в теории, для достаточно малых величин внешнего воздействия, он может быть использован для мягкого удаления спиральных волн из фибрillирующей сердечной ткани. Используемые в настоящее время методы дефибрилляции одним мощным электрическим разрядом не всегда эффективны и, в то же время, могут вызывать значительные повреждения сердечной ткани, не говоря уже о том, что они сильно превышают болевой порог даже для имплантируемых дефибрилляторов.

Практическое применение резонансного дрейфа для дефибрилляции определяется двумя видами условий:

- (а) способностью преодолеть "несовершенство" реального сердца по сравнению с теорией (неоднородности, сложные структуры и т.д.). Это приводит к необходимости протокола обратной связи для резонансного дрейфа [77], и было показано, что такой протокол успешно работает даже в условиях реалистичной сложной трехмерной геометрии желудочка сердца [81].
- (б) реалистичными временами (скажем, менее одной минуты), требуемыми для удаления спиральных волн при амплитуде стимуляции значительно меньшей, чем используемые в современных одноразрядных дефибрилляторах. Это время определяется скоростью резонансного дрейфа, которая может быть найдена из натурного или численного эксперимента с биофизически реалистичными

моделями [74, 35, 50]. Оба этих способа, однако, очень сложны, тогда как асимптотическая теория, использующая функции отклика спиральных волн, дает гораздо более легкий способ оценки скорости резонансного дрейфа.

В этой главе мы использовали явно найденные ФО для теоретического предсказания скорости резонансного дрейфа спиральных волн в комплексном уравнении Гинзбурга-Ландау. Основные результаты этой главы были опубликованы в наших работах [4, 3].

Мы рассматривали периодическое во времени возмущение уравнения (2.6) следующего вида:

$$\mathbf{h}(t) = \cos(\omega t)\mathbf{1}, \quad (4.7)$$

где  $\omega$  — период вращения невозмущенной спиральной волны. Резонансный дрейф в численном эксперименте с КУГЛ с таким возмущением проиллюстрирован на рис. 4.1.

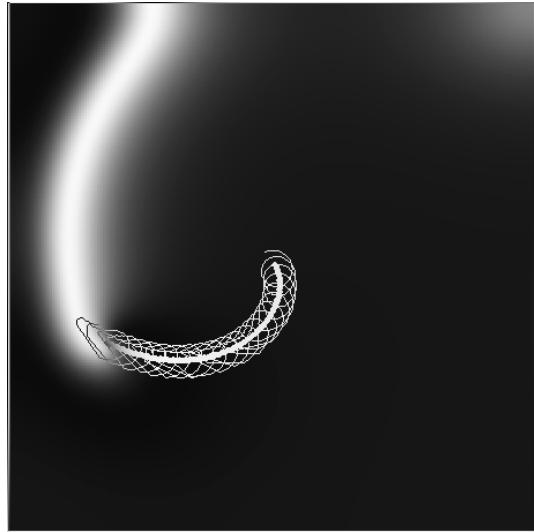


Рис. 4.1: Резонансный дрейф спиральной волны в КУГЛ.  $\alpha = 0.5$ ,  $\beta = 0$ , размер среды  $100 \times 100$  с.и., амплитуда возмущения  $\epsilon = 0.05$ , шаги дискретизации  $\Delta t = 0.025$ ,  $\Delta x = 0.5$ . Тонкая “циклоидная” линия — траектория кончика  $\mathbf{u} = (0.9 + 0\mathbf{I})\mathbf{1}$ , толстая линия — траектория центра спирали  $\mathbf{u} = (0 + 0\mathbf{I})\mathbf{1}$ .

Для того, чтобы получить пригодное для практических вычислений выражение для скорости резонансного дрейфа  $H_1$ , подставим в выражение (4.3) выражение для возмущения (4.7) и представление (2.13) и (2.18) для ФО. Это дает

$$\begin{aligned}
H_1 &= \left\langle \epsilon \iint_{\mathbb{R}^2} e^{(\mathbf{I}-i)\theta} (C + \mathbf{I}D + iE + i\mathbf{I}F) e^{\mathbf{I}\psi} \cdot \mathbf{1} d^2\vec{r}, \oint e^{-i\Omega\tau} \cos(\Omega\tau) \mathbf{1} \frac{\Omega d\tau}{2\pi} \right\rangle = \\
&= \left\langle \epsilon \oint e^{(\mathbf{I}-i)\theta} d\theta \int_0^\infty (C + \mathbf{I}D + iE + i\mathbf{I}F) e^{\mathbf{I}\psi} \cdot \mathbf{1} \rho d\rho, \oint e^{-i\Omega\tau} \cos(\Omega\tau) \mathbf{1} \frac{\Omega d\tau}{2\pi} \right\rangle = {}^1 \\
&= \left\langle \pi\epsilon(1 - i\mathbf{I}) \int_0^\infty (C + \mathbf{I}D + iE + i\mathbf{I}F) e^{\mathbf{I}\psi} \cdot \mathbf{1} \rho d\rho, \oint e^{-i\Omega\tau} \cos(\Omega\tau) \cdot \mathbf{1} \frac{\Omega d\tau}{2\pi} \right\rangle = \\
&= \frac{\pi\epsilon}{2} \left\langle \int_0^\infty (1 - i\mathbf{I})(C + \mathbf{I}D + iE + i\mathbf{I}F)(\cos\psi + \mathbf{I}\sin\psi) \rho d\rho \cdot \mathbf{1}, \mathbf{1} \right\rangle = \\
&= \frac{\pi\epsilon}{2} \left\langle \int_0^\infty \left\{ \begin{array}{l} [(C - F)\cos\psi - (D + E)\sin\psi] \\ + i[(C - F)\sin\psi + (D + E)\cos\psi] \end{array} \right. + \right. \\
&\quad \left. \left. + \mathbf{I}[(C - F)\sin\psi + (D + E)\cos\psi] \right. + \right. \\
&\quad \left. \left. + i\mathbf{I}[(-C + F)\cos\psi + (D + E)\sin\psi] \right\} \rho d\rho \cdot \mathbf{1}, \mathbf{1} \right\rangle \quad (4.8)
\end{aligned}$$

Заметим, что если  $\mathbf{a} = (a_1 + \mathbf{I}a_2) \cdot \mathbf{1}$ ,  $\mathbf{b} = (b_1 + \mathbf{I}b_2) \cdot \mathbf{1}$ , где  $a_1, a_2, b_1, b_2$  — “обычные”  $i$ -комплексные числа, то скалярное произведение  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  дается формулой

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle \equiv \overline{a_1}b_1 + \overline{a_2}b_2.$$

---

<sup>1</sup>Здесь полезно следующее простое но “специфически бикомплексное” соотношение:

$$\int_0^{2\pi} e^{(\mathbf{I}-i)\theta} d\theta = \oint \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} e^{-i\theta} d\theta = \pi \begin{bmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{bmatrix} = \pi(1 - i\mathbf{I}).$$

С учетом этого (4.8) продолжится следующим образом:

$$H_1 = \frac{\pi\epsilon}{2} \int_0^\infty \{[(C - F) \cos \psi - (D + E) \sin \psi] - \\ - i [(C - F) \sin \psi + (D + E) \cos \psi]\} \rho d\rho.$$

Последнее выражение справедливо в предположении, что выполнены условия биортогональности (1.5), в частности, условие нормировки

$$S = 1,$$

где

$$S \equiv \iint_{\mathbb{R}^2} \langle \mathbf{W}_1, \mathbf{V}_1 \rangle d^2\vec{r},$$

и

$$\mathbf{V}_1 = -\frac{1}{2}e^{-i\theta}(\partial_\rho - i\rho^{-1}\partial_\theta)\mathbf{U}(\rho, \theta).$$

Если же ФО найдены как решения линейной однородной задачи без учета этой нормировки, и  $S \neq 1$ , то выражение для скорости дрейфа должно быть поделено на это значение  $S$ .

Подставляя (4.1), (2.13) и (2.18) в (4.1), получим

$$S = -\frac{1}{2} \oint d\theta \int_0^\infty \rho d\rho \times \\ \times \left\langle e^{(\mathbf{I}-i)\theta} (C + \mathbf{I}D + iE + i\mathbf{I}F) e^{\mathbf{I}\psi} \cdot \mathbf{1}, e^{(\mathbf{I}-i)\theta} \left( a' + \mathbf{I}a\psi' - \frac{i\mathbf{I}a}{\rho} \right) e^{\mathbf{I}\psi} \cdot \mathbf{1} \right\rangle \quad (4.9)$$

Заметим что для любых бикомплексных  $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$  и вещественного  $\alpha$  справедливо  $\langle \mathbf{b}_1 e^{\mathbf{I}\alpha} \cdot \mathbf{1}, \mathbf{b}_2 e^{\mathbf{I}\alpha} \cdot \mathbf{1} \rangle = \langle \mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{1}, \mathbf{b}_2 \cdot \mathbf{1} \rangle$ . Поэтому (4.9) продолжится следующим образом:

$$S = -\frac{1}{2} \left\langle \oint d\theta \int_0^\infty \rho d\rho (C + \mathbf{I}D + iE + i\mathbf{I}F) \cdot \mathbf{1}, \left( a' + \mathbf{I}a\psi' - \frac{i\mathbf{I}a}{\rho} \right) \cdot \mathbf{1} \right\rangle = \\ = -\pi \int_0^\infty \left[ (C - iE)a' + (D - iF)(a\psi' - \frac{ia}{\rho}) \right] \rho d\rho =$$

$$= \pi \int_0^\infty [aF - \rho(Ca' + Da\psi') + i((Ea' + a\psi'F)\rho + Da)] d\rho.$$

Окончательно для скорости резонансного дрейфа имеем<sup>2</sup>:

$$\begin{aligned} |\partial_t \vec{R}| &= \epsilon |H_1| = \\ &= \epsilon \left| \frac{\int_0^\infty [(C - F) \cos \psi - (D + E) \sin \psi] - i[(C - F) \sin \psi + (D + E) \cos \psi] \rho d\rho}{2 \int_0^\infty [aF - \rho(a'C + a\psi'D) + i(aD + \rho(a'E + a\psi'F))] d\rho} \right|. \quad (4.10) \end{aligned}$$

Таким образом, если известны Хагановское решение  $a, \psi$  и компоненты пространственной функции отклика  $C, D, E, F$ , формула (4.10) дает теоретическое предсказание скорости резонансного дрейфа.

## 4.2 Результаты.

Было проведено сравнение теоретического предсказания скорости резонансного дрейфа спиральной волны при  $\alpha = 0.5$  и  $\beta = 0$  с результатами прямых численных экспериментов. Формула (4.10) дает нормализованную скорость дрейфа

$$|\partial_t \vec{R}|/\epsilon = |H_1| \approx 2.8423,$$

которая была вычислена при шаге пространственной дискретизации задачи (2.14)  $\Delta\rho = 0.005$ .

Прямые численные расчеты КУГЛ (2.6) проводились с возмущением (4.7) с амплитудой  $\epsilon$  до 0.1. Использовались две разных конечно-разностных схемы: (1) явная схема первого порядка и (2) полуяявная схема с использованием метода переменных направлений, второго порядка. Обе схемы использовали 5-точечную аппроксимацию оператора Лапласа. Размер вычислительной сетки был от  $100 \times 100$  до  $300 \times 300$ ,

---

<sup>2</sup>В статье [3] в выражение (4.10) вкрадась опечатка: в знаменателе потеряны члены с  $\psi'$ . Это же выражение воспроизведено в автореферате.

с шагами дискретизации по пространству  $\Delta t$  от 0.005 до 0.5 и  $\Delta x$  от 0.2 до 0.5.

Начальные условия задавались, используя решение Хагана.

Траектория центра спиральной волны определялась как пересечение нуль-изолиний I-вещественной и I-мнимой частей поля  $\mathbf{u}$ . Эта траектория использовалась для измерения скорости дрейфа с использованием двух различных методов. Если траектория была достаточно длинной, чтобы образовывать круг или значительную часть круга, она фитировалась уравнением (4.4). Для более коротких отрезков траекторий это было неудобно, и тогда использовалось конечно-разностное дифференцирование со слаживанием. Чтобы уменьшить влияние малых колебаний центра, вызванных вращением спирали, выбирался шаг дифференцирования как можно ближе к периоду этого вращения. Когда оба эти метода были применимы, они давали одинаковые результаты в пределах присущей им точности, которая была ограничена в основном вышеупомянутыми колебаниями центра и влиянием пространственной дискретизации.

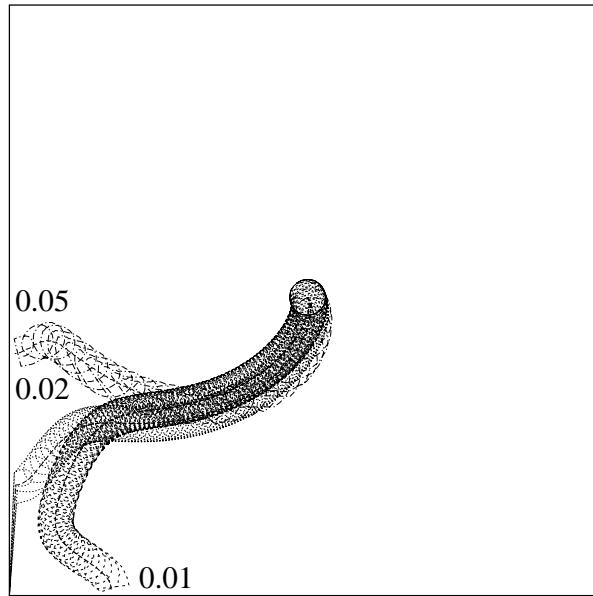


Рис. 4.2: Траектории резонансного дрейфа при разных  $\epsilon$  (показаны как метки траекторий). Среда размером  $100 \times 100$ ,  $\Delta t = 0.025$ ,  $\Delta x = 0.5$ .

Некоторые типичные траектории показаны на рис. 4.2. Взаимодействие с

границами среды становится видно только на расстояниях меньше 30. На больших расстояниях и после начального переходного периода траектории центра — приблизительно круговые. При увеличении амплитуды возмущения, радиусы этих кругов уменьшались, а скорость дрейфа увеличивалась. Оба эти качественных наблюдения находятся в согласии с теорией, см. (4.5) и (4.6).

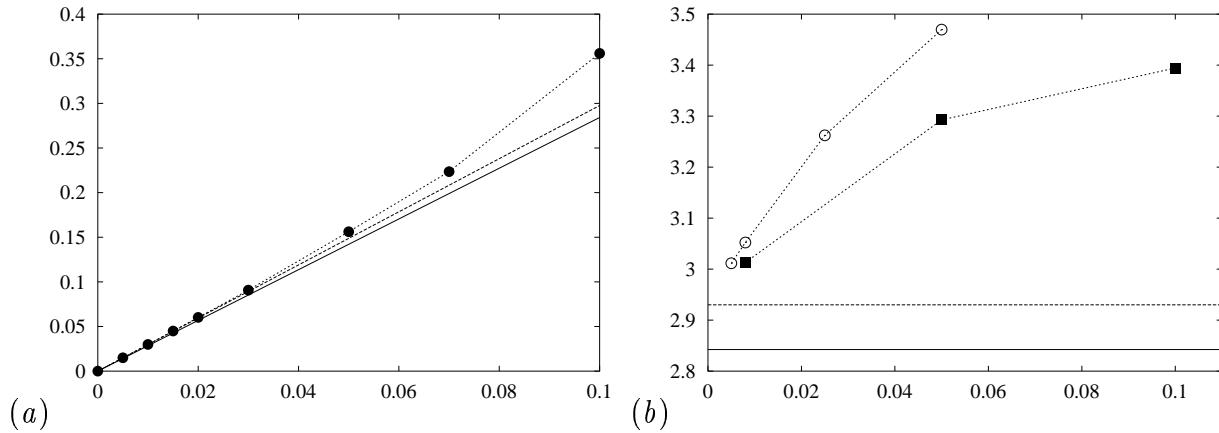


Рис. 4.3: (a) Скорость дрейфа  $|\partial_t \vec{R}|$  как функция амплитуды возмущения  $\epsilon$ . Пунктирная линия с точками: результат прямого численного эксперимента. Сплошная линия: теоретическая зависимость. Штриховая линия: наилучшее линейное приближение численных результатов при малой амплитуде, (b) Нормализованная скорость дрейфа,  $|\partial_t \vec{R}/\epsilon|$ , как функция шага по времени  $\Delta t$  при амплитуде возмущения  $\epsilon = 0.01$ . Штриховая линия с полыми кружками: явная схема, шаг по пространству  $\Delta x = 0.5$ . Точки с черными квадратами: схема переменных направлений, шаг по пространству  $\Delta x = 0.2$ . Сплошная линия: теоретическое значение 2.84... Штриховая линия: “огрубленное” теоретическое значение 2.93..., вычисленное при  $\Delta \rho = 0.2$ .

Также в согласии с теорией скорость резонансного дрейфа была приблизительно пропорциональна амплитуде возмущения  $\epsilon$ , см. рис. 4.3(a). Эта пропорциональность хорошо соблюдалась даже при  $\epsilon = 0.05$ , а при этой амплитуде дрейфующая спиральная волна уже существенно деформирована, как это видно на рис. 4.1, и теория возмущений, казалось бы, не должна быть применима. Этот парадокс

объясняется тем, что указанная деформация возникает из-за движения периферии спиральной волны относительно ее центра, т.е. “автоволнового эффекта Допплера” [82], в то время как скорость дрейфа определяется в основном событиями в ядре, где ФО только и отличны от нуля. В пределах же ядра искажения вследствие эффекта Допплера при этой амплитуде возмущения несущественны.

Для количественной проверки предсказаний, мы измеряли нормализованную скорость дрейфа  $|\partial_t \vec{R}/\epsilon|$  в численных экспериментах и ее поведение при  $\epsilon \rightarrow 0$ ,  $\Delta t \rightarrow 0$  и  $\Delta x \rightarrow 0$ . Результаты показаны на рис. 4.3(b).

Ключевым параметром, ограничивающим сходимость к теоретическому значению скорости дрейфа, оказался шаг пространственной дискретизации прямых расчетов  $\Delta x$ . Поскольку уменьшение этого параметра сопряжено с существенными вычислительными затратами, для проверки роли этого параметра мы предприняли обходной маневр. А именно, мы вычислили “огрубленное” теоретическое значение скорости дрейфа с точностью, соответствующей точности прямых численных расчетов. То есть, было повторено вычисление Хагановского решения и ФО, т.е. решены системы (2.8,2.9,2.10) и (2.14,2.15,2.16), с шагом, равным наименьшему шагу дискретизации прямых расчетов:  $\Delta\rho = \Delta x_{\min} = 0.2$ , а интегралы (4.10) оценены, вместо формулы Симпсона, по формуле трапеций, которая имеет тот же порядок точности, что и 5-точечная аппроксимация оператора Лапласа в прямых расчетах. Результирующее “огрубленное” теоретическое значение получилось  $|H_1| \approx 2.93$  и также показано на рис. 4.3(b).

Таким образом, для наименьших шагов в прямых расчетах отличие “экспериментального” значения скорости дрейфа от теоретического значения, подсчитанного с использованием ФО, сравнимо с ошибкой, вносимой пространственным огрублением в само теоретическое значение.

## 4.3 Выводы

- До настоящего исследования, резонансный дрейф изучался только в возбудимых средах, хотя общие соображения [55, 74] предсказывали, что это явление имеет симметрийную природу и должно наблюдаться и в автоколебательных средах тоже. В данной работе это качественное предсказание подтверждено в численном эксперименте.
- Показано, что ФО могут быть использованы, чтобы количественно предсказывать параметры резонансного дрейфа. Эти предсказания согласуются качественно и количественно с результатами прямых численных расчетов в пределах точности, присущей эти расчетам.
- Таким образом, асимптотическая теория динамики спиральных волн [74] впервые получила прямое количественное подтверждение.
- Метод ФО может быть использован для предсказания динамики спиральных и свитковых волн в моделях, представляющих практический интерес, при меньших вычислительных затратах, чем требуют прямые численные расчеты.

# Глава 5

## Дрейф под влиянием неоднородности среды.

### 5.1 Теория явления

Если возмущение не зависит от времени явно, но вместо этого явно зависит от пространственных координат, т.е. вместо время-зависимого внешнего воздействия мы имеем систему с пространственно-неоднородными свойствами,

$$\mathbf{h}(\mathbf{u}, \vec{r}, t) = \mathbf{h}(\mathbf{u}, \vec{r}), \quad (5.1)$$

то спиральные волны также дрейфуют. В этом случае зависимость от пространственных координат приводит к периодической зависимости от времени в системе отсчета, вращающейся вместе со спиральной волной. Естественно, такое возмущение оказывается синхронизированным с этим вращением, так что условия резонанса выполняются автоматически.

Дрейф спиральных волн вследствие неоднородности среды в настоящее время хорошо известен: он изучался в численных экспериментах [53] и затем в натурных экспериментах, в том числе в сердечной ткани [83, 84] и в реакции Белоусова-Жаботинского [85]. Предпринимались и попытки объяснить или предсказать направление и величину скорости такого дрейфа [53, 61, 62, 57], но, как правило,

их применимость была ограничена узким классом неоднородностей в автоволновых средах со специальными свойствами. Метод функций отклика дает возможность предсказывать теоретически скорость дрейфа спиральных волн, вызванного слабой неоднородностью среды, без ограничений на тип этой неоднородности. В данной главе мы сравниваем предсказанные с использованием ФО скорости дрейфа спиральных волн с результатами прямых численных расчетов КУГЛ. Основные результаты данной главы опубликованы в нашей работе [1].

Мы рассмотрели дрейф спиральных волн в КУГЛ при двух различных типах неоднородности его параметров: по параметру нелинейной дисперсии  $\alpha$  и по частоте синхронных колебаний среды.

Первый тип неоднородности дается возмущением

$$\mathbf{h} = \mathbf{I}x|\mathbf{u}|^2\mathbf{u}. \quad (5.2)$$

Оно соответствует линейной неоднородности параметра  $\alpha$ :

$$\tilde{\alpha}(\vec{r}) = \alpha + \epsilon x.$$

Без ограничения общности достаточно рассмотреть случай, когда центр спирали имеет координату  $X = 0$ ; в противном случае, необходимо просто сдвинуть систему отсчета и рассмотреть задачу при соответствующем значении параметра  $\alpha$ .

Второй тип неоднородности дается возмущением:

$$\mathbf{h} = \mathbf{I}x\mathbf{u}. \quad (5.3)$$

Он также может быть рассмотрен как неоднородность по параметру  $\Omega$  в “расширенной” версии КУГЛ:

$$\partial_t \mathbf{u} = \mathbf{u} + \mathbf{I}\Omega \mathbf{u} - (1 - \mathbf{I}\alpha) \mathbf{u} |\mathbf{u}|^2 + (1 + \mathbf{I}\beta) \nabla^2 \mathbf{u} \quad (5.4)$$

Если  $\Omega$  — константа, то уравнение (5.4) преобразованием

$$\mathbf{u} \mapsto \mathbf{u} \exp(\mathbf{I}\Omega t)$$

приводится к виду (2.6). Если же  $\Omega$  линейно зависит от пространственных координат, например, от координаты  $x$ , то такое же преобразование с частотой, соответствующей мгновенному положению центра спирали, приводит к виду (5.4). При этом начало координат помещается в центр спирали (опять-таки, без ограничения общности).

Формально говоря, в бесконечной среде, для которой развита асимптотическая теория, оба возмущения (5.2) и (5.3) не являются малыми: каким бы малым ни было  $\epsilon$ , при достаточно больших  $x$  произведение  $\epsilon \mathbf{h}$  будет конечным или даже сколь угодно большим. Однако, в силу эффективной локализации функций отклика существенно лишь поведение этого возмущения в некоторой конечной окрестности центра вращения (ядра) спирали. Математически это сказывается в том, что несобственные интегралы (1.12), определяющие скорость дрейфа, сходятся, что будет показано ниже.

В первом порядке по  $\epsilon$ , следуя теории возмущений, функция  $\mathbf{u}(\vec{r}, t)$  в (5.2), (5.3) заменяется на невозмущенное решение  $\mathbf{U}$ , которое в собственной системе отсчета, согласно (2.7) и (2.1.1), имеет вид:

$$\mathbf{U} = a(\rho) e^{\mathbf{I}(\theta + \psi(\rho))} \mathbf{1}.$$

С учетом этого обстоятельства оба возмущения, (5.2) и (5.3), могут быть записаны в системе отсчета спирали в виде:

$$\mathbf{h} = \rho a^n(\rho) \cos(\theta - \omega t + \Phi) \mathbf{I} e^{\mathbf{I}(\theta + \psi(\rho))} \mathbf{1}, \quad (5.5)$$

где  $n = 3$  для (5.2) и  $n = 1$  для (5.3).

Помимо выражения для возмущения (5.5) нам понадобятся выражения (2.13) и (2.18). Подстановка их в (1.12) дает усредненную скорость дрейфа:

$$\begin{aligned} \epsilon \overline{H_1}(t) &= \epsilon \oint \frac{\omega dt}{2\pi} e^{-i(\omega t - \Phi)} \iint \langle e^{(\mathbf{I}-i)\theta} \mathbf{Q}_1(\rho), \rho a^n \cos(\theta - \omega t + \Phi) \mathbf{I} e^{\mathbf{I}(\theta + \psi)} \mathbf{1} \rangle d^2 \vec{r} = \\ &= \epsilon \int_0^{2\pi/\omega} \frac{\omega dt}{2\pi} e^{-i(\omega t - \Phi)} \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \langle e^{-i\theta} (C + \mathbf{I}D + iE + i\mathbf{I}F) e^{\mathbf{I}\psi} \cdot \mathbf{1}, \rho \cos(\theta - \omega t + \Phi) \mathbf{I}a^n(\rho) e^{\mathbf{I}\psi} \cdot \mathbf{1} \rangle d\theta \rho d\rho = \\
& = \epsilon \int_0^{2\pi/\omega} \frac{\omega dt}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \langle (C + \mathbf{I}D + iE + i\mathbf{I}F) \cdot \mathbf{1}, e^{i(\theta-\omega t+\Phi)} \rho \cos(\theta - \omega t + \Phi) \mathbf{I}a^n(\rho) \cdot \mathbf{1} \rangle d\theta \rho d\rho = \\
& = \frac{\epsilon}{2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\infty \langle (C + \mathbf{I}D + iE + i\mathbf{I}F) \cdot \mathbf{1}, a^n(\rho) \mathbf{I} \cdot \mathbf{1} \rangle \rho^2 d\rho = \\
& = \epsilon \pi \int_0^\infty \langle (C + \mathbf{I}D + iE + i\mathbf{I}F) \cdot \mathbf{1}, a^n(\rho) \mathbf{I} \cdot \mathbf{1} \rangle \rho^2 d\rho = \\
& = \epsilon \pi \int_0^\infty (D - iF) a^n \rho^2 d\rho.
\end{aligned}$$

Сходимость этого несобственного интеграла, несмотря на наличие растущего множителя  $\rho^2$ , обеспечивается экспоненциальным убыванием компонент ФО  $D$  и  $F$ .

Как и в предыдущей главе, если ФО найдены без учета нормировки, то это выражение должно быть поделено на нормирующий коэффициент, даваемый формулой (4.1). Это приводит к следующему выражению для скорости дрейфа:

$$\begin{aligned}
\partial_t R &= \partial(X + iY) = \epsilon H_1 = \\
&= \frac{\epsilon \int_0^\infty [D - iF] a^n \rho^2 d\rho}{\int_0^\infty [aF - \rho(a'C + a\psi'D) + i(aD + \rho(a'E + a\psi'F))] d\rho},
\end{aligned} \tag{5.6}$$

где  $n = 1$  для возмущения (5.3) и  $n = 3$  для возмущения (5.2).

В том же предположении, что центр спирали находится в начале координат,  $X = 0$ , для поправки к частоте получается предсказание  $H_0 = 0$ , т. е. имеет место отсутствие сдвига по частоте по сравнению с невозмущенной задачей. Это происходит потому, что возмущение  $\mathbf{h}$  в (5.2) и (5.3) — четная функция пространственных координат, а  $\mathbf{W}_0$  в (2.13) — нечетная.

## 5.2 Результаты.

### 5.2.1 Неоднородность по коэффициенту нелинейной дисперсии.

Для сравнения теоретически предсказанной скорости дрейфа спиральной волны вследствие возмущения среды (5.2) с результатами прямых численных экспериментов были выбраны значения параметров  $\alpha = 0.1$ ,  $\beta = 0.6$ . Спиральная волна  $\mathbf{U}(\vec{r})$  и ФО  $\mathbf{W}_0(\vec{r})$  и  $\mathbf{W}_1(\vec{r})$ , соответствующие этим параметрам, показаны на рис. 5.1.

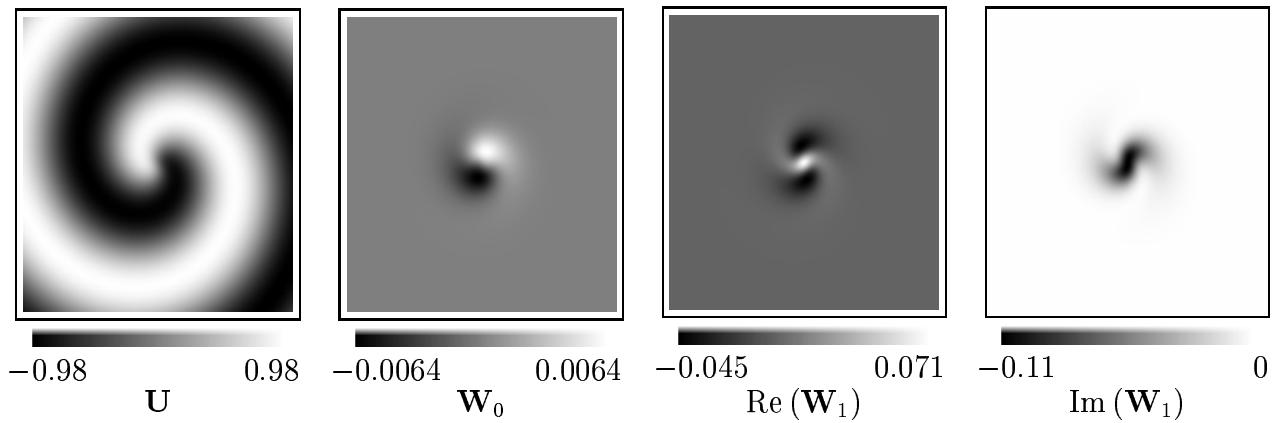


Рис. 5.1: Спиральная волна и ФО ( $\alpha = 0.1$ ,  $\beta = 0.6$ ).

Формула (5.6),  $n = 3$ , для этих параметров среды дает нормализованные скорости:

$$\partial_t X/\epsilon = (\vec{H}_1)_x = \text{Re}(H_1) \approx -1.958,$$

$$\partial_t Y/\epsilon = (\vec{H}_1)_y = \text{Im}(H_1) \approx -29.137,$$

вычисленные при шаге дискретизации задачи (2.14)  $\Delta\rho = 0.01$ . Сравнение с результатами при больших  $\Delta\rho$  показывают, что эти значения точны в пределах 0.1%.

Для сравнения с предсказаниями теории были проведены прямые численные расчеты (2.6) с возмущением (5.2) амплитуды  $\epsilon = 0.0001$ . Использовалась явная схема Эйлера по времени с 5-точечной аппроксимацией Лапласиана. Вычислительная сетка пространственного размера  $128 \times 128$ , с шагами по пространству  $\Delta x$  от 0.25 до 0.5

и по времени  $\Delta t$  от 0.005 до 0.4. Начальные условия задавались, используя решение Хагана.

Мгновенный центр спирали определялся как пересечение нуль-изолиний I- вещественной и I-мнимой компонент  $\mathbf{u}$ . Координаты центра использовались для измерения скорости дрейфа: после первоначального переходного периода траектории становились прямыми, и зависимости координат от времени фитировались линейными функциями. Изучалась зависимость измеренных таким образом нормализованных компонент скорости  $\partial_t X/\epsilon$  и  $\partial_t Y/\epsilon$  от параметров вычислительной процедуры  $\Delta x$  и  $\Delta t$  в пределе  $\Delta x \rightarrow 0$  и  $\Delta t \rightarrow 0$ . Результаты этих численных экспериментов показаны на рис. 5.2 и 5.3, вместе с результатами теоретических предсказаний.

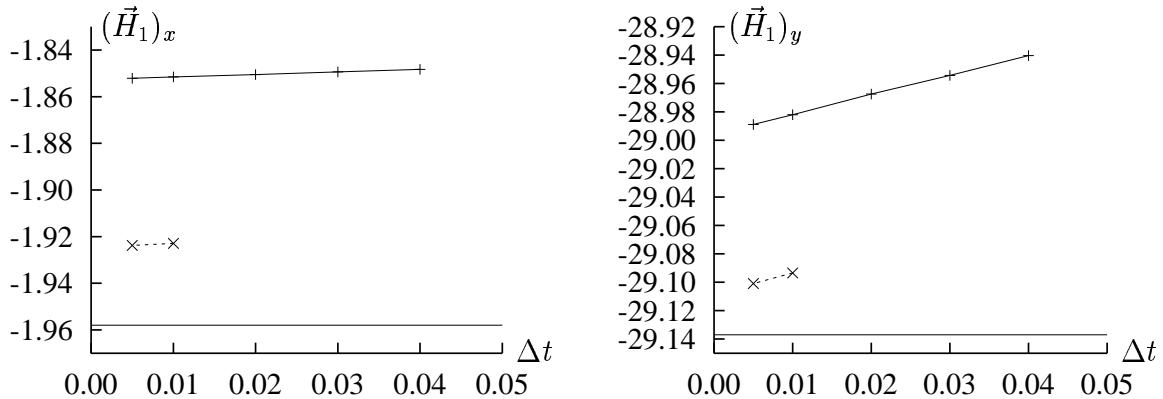


Рис. 5.2: Нормализованные компоненты скорости дрейфа  $(\vec{H}_1)_x$ ,  $(\vec{H}_1)_y$  вследствие неоднородности по коэффициенту нелинейной дисперсии  $\alpha$ , в зависимости от  $\Delta t$ , при  $\Delta x = 0.5$  (сплошные линии, “+”) и  $\Delta x = 0.25$  (пунктирные линии, “ $\times$ ”). Сплошные горизонтальные линии без точек — теоретические значения.

Ключевым параметром, ограничивающим сходимость к теоретическому значению, опять оказался шаг пространственной дискретизации  $\Delta x$  в численном эксперименте. При наименьших шагах  $\Delta t = 0.005$  и  $\Delta x = 0.25$  компоненты нормализованной

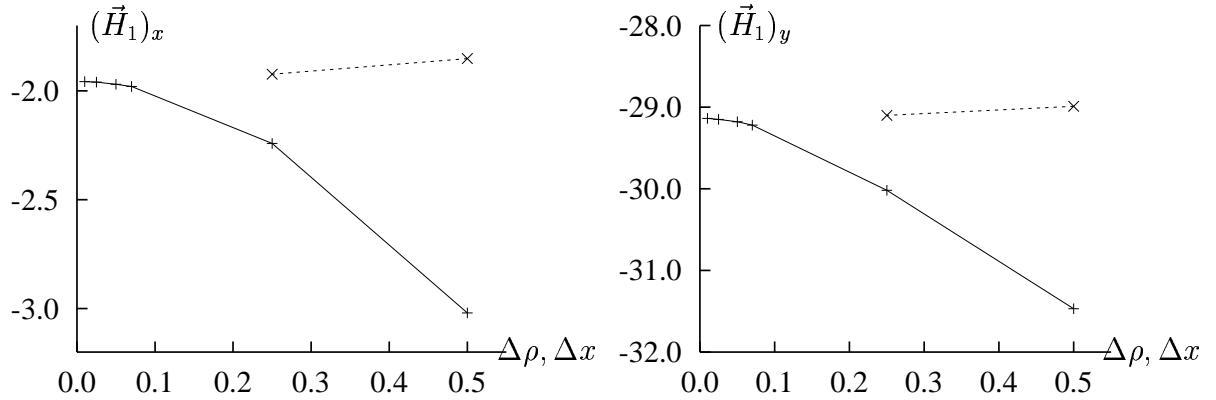


Рис. 5.3: Нормализованные компоненты скорости дрейфа вследствие неоднородности по коэффициенту нелинейной дисперсии  $\alpha$ : теоретические предсказания основанные на вычислении ФО, в зависимости от  $\Delta\rho$  (сплошные линии, “+”), и результаты прямых численных экспериментов, в зависимости от  $\Delta x$ , при  $\Delta t = 0.01$  (пунктирные линии, “ $\times$ ”).

скорости дрейфа в прямых расчетах были

$$\begin{aligned}\partial_t X/\epsilon &= (\vec{H}_1)_x = \text{Re}(H_1) \approx -1.923, \\ \partial_t Y/\epsilon &= (\vec{H}_1)_y = \text{Im}(H_1) \approx -29.09,\end{aligned}$$

т.е. отличие от теоретического значения составило меньше 2%. Таким образом, и в случае дрейфа спиральной волны, вызванном неоднородностью среды (5.2), предсказания асимптотической теории оказались в хорошем количественном соответствии с результатами прямых численных экспериментов (в пределах точности этих экспериментов).

### 5.2.2 Неоднородность по частоте основных колебаний.

Результаты расчета приведенных скоростей дрейфа для неоднородности вида (5.3) показаны на рис. 5.4 и 5.5. Для сравнения, эти графики приведены для тех же параметров среды  $\alpha = 0.1$ ,  $\beta = 0.6$ , что и рис. 5.2 и 5.3. Видно, что результаты качественно и количественно похожи.

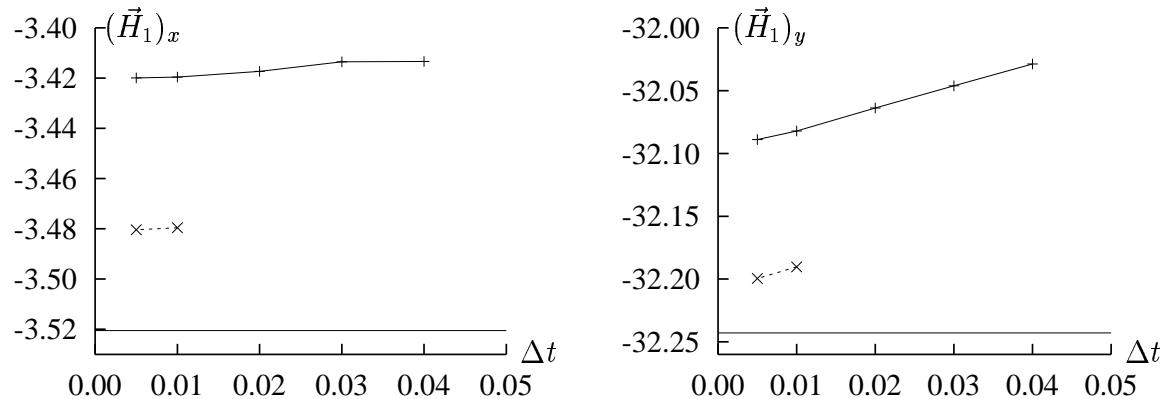


Рис. 5.4: Нормализованные компоненты скорости дрейфа  $(\vec{H}_1)_x$ ,  $(\vec{H}_1)_y$  вследствие неоднородности по частоте синхронных колебаний среды  $\Omega$ , в зависимости от  $\Delta t$ , при  $\Delta x = 0.5$  (сплошные линии, “+”) и  $\Delta x = 0.25$  (пунктирные линии, “ $\times$ ”). Сплошные горизонтальные линии без точек — теоретические значения.

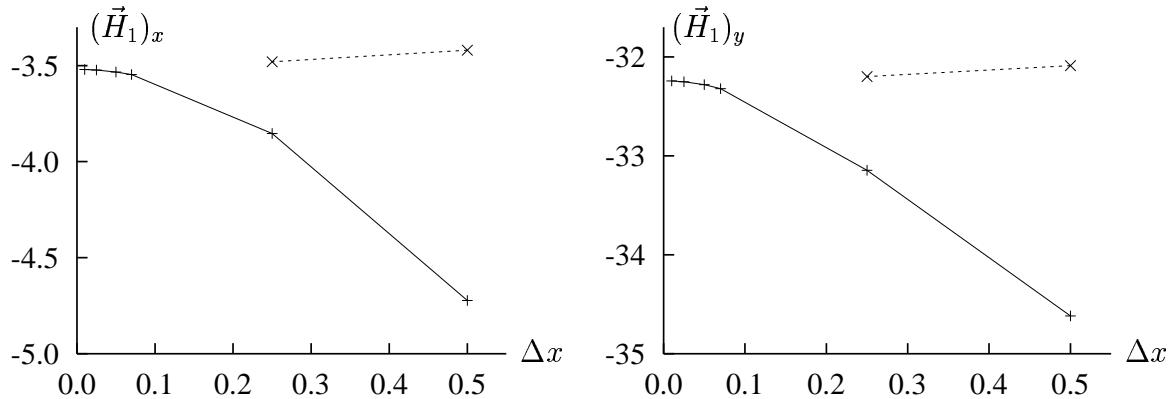


Рис. 5.5: Нормализованные компоненты скорости дрейфа вследствие неоднородности по частоте синхронных колебаний среды  $\Omega$ : теоретические предсказания основанные на вычислении ФО, в зависимости от  $\Delta \rho$  (сплошные линии, “+”), и результаты прямых численных экспериментов, в зависимости от  $\Delta x$ , при  $\Delta t = 0.01$  (пунктирные линии, “ $\times$ ”).

Неоднородность вида (5.3) была выбрана для сравнения с недавно опубликованными результатами [57], полученными другим методом, существенно использующим особенности КУГЛ.

Величины  $\operatorname{Re}(H_1)$ ,  $\operatorname{Im}(H_1)$  найденные по (5.6),  $n = 1$ , совпадают по смыслу с коэффициентами  $m_{\omega,||}$ ,  $m_{\omega,\perp}$  работы [57]. Для сравнения результатов мы вычислили Хагановское решение  $a, \psi$  и компоненты ФО  $C, D, E, F$  для  $\alpha$  в интервале  $[-1, 0]$ , который соответствует  $\alpha \in [0, 1]$  в [57] из-за разницы в обозначениях, при фиксированном  $\beta = -1$ . Этот интервал пересекает линию неустойчивости Экхауза при  $\alpha \approx -0.4$ , так что часть интервала соответствует устойчивым спиральным волнам, а часть — неустойчивым. Спиральные волны и ФО, соответствующие концам этого интервала, изображены на рис. 5.6 и 5.7.

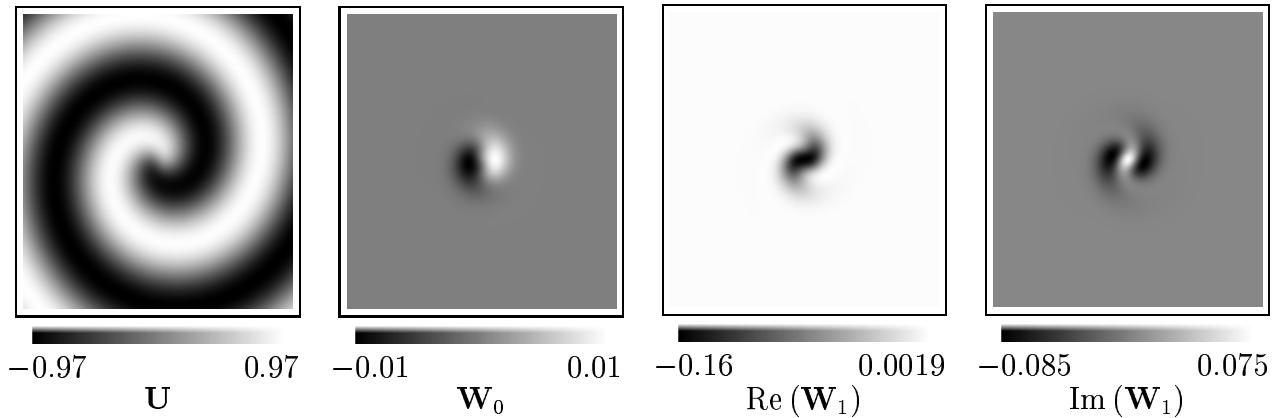


Рис. 5.6: Спиральная волна и ФО ( $\alpha = 0, \beta = -1$ ).

Скорости дрейфа вследствие этой неоднородности, найденные по (5.6),  $n = 1$ , показаны на рис. 5.8. Эти кривые неотличимы от соответствующих результатов [57] (которые опубликованы только для  $0 \leq \alpha \leq 0.8$ ). Более того, вычисления по (5.6),  $n = 1$ , предсказывают, что  $\operatorname{Re}(H_1)$  меняет знак при  $\alpha \approx -0.87$ . Это — пример качественного предсказания, которое получено с использованием ФО, и которое было бы трудно получить другим способом. В данном случае, это предсказание затруднительно проверить в численном эксперименте из-за Экхаузовой неустойчивости спирали в этой области параметров.

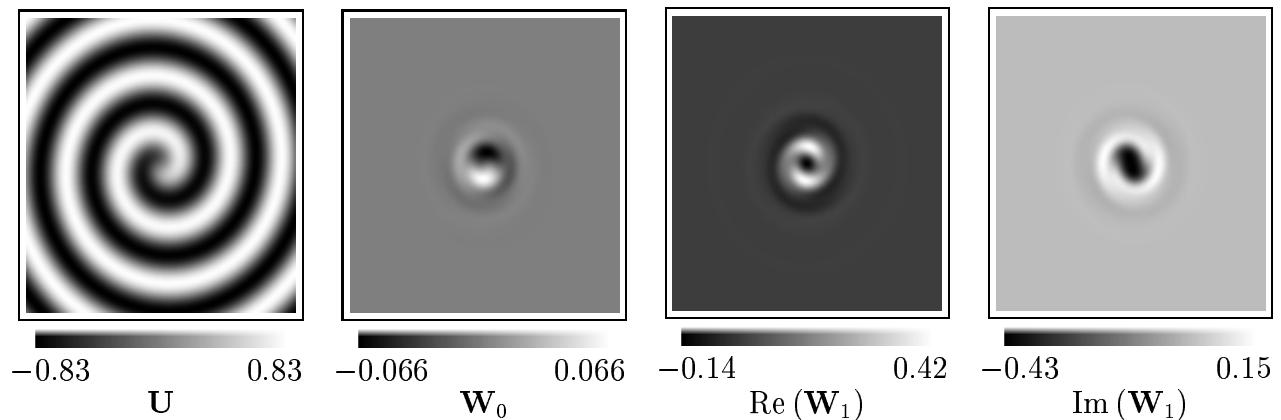


Рис. 5.7: Спиральная волна и ФО ( $\alpha = -1$ ,  $\beta = -1$ ).

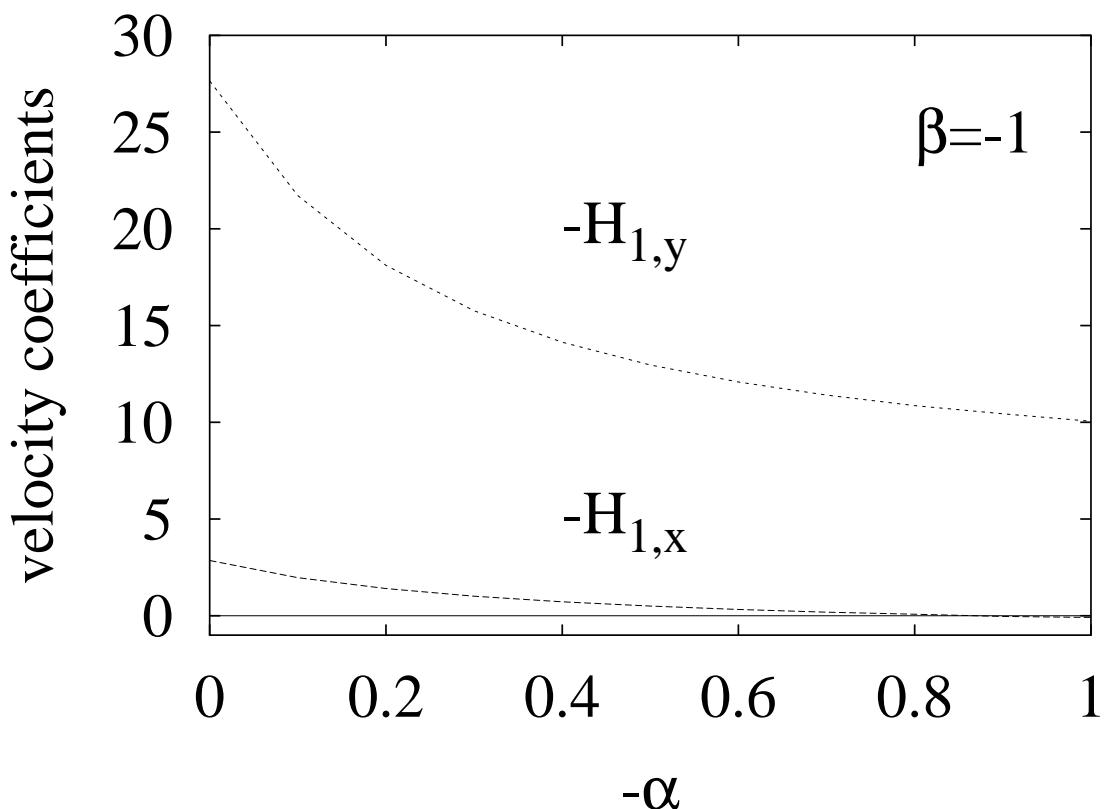


Рис. 5.8: Нормализованные скорости дрейфа как функции  $\alpha$  при  $\beta = -1$ .

## 5.3 Выводы

- Метод ФО показал свою работоспособность и для задачи о дрейфе спиральной волны под воздействием неоднородности среды. Это было продемонстрировано для разных типов неоднородностей. Как и для резонансного дрейфа, метод ФО предоставляет вычислительно более экономный способ исследования параметров дрейфа в моделях, представляющих практический интерес, по сравнению с прямым численным экспериментом.
- Показано, что метод ФО может в ряде случаев давать и качественные предсказания. Пример — описанная в этой главе смена знака коэффициента продольной скорости  $H_{1,x}$  при  $\beta = -1$  и  $\alpha \approx -0.87$  для неоднородности (5.3). Это явление было бы трудно заметить в прямых расчетах не только вследствие малого значения продольной скорости при разумных значениях параметров, но и по причине Экхаузовой неустойчивости спиральной волны. Используя же метод ФО, можно, зная эту начальную точку, протянуть линию  $H_{1,x} = 0$  в плоскости  $(\alpha, \beta)$  до области, где это явление было бы легче наблюдать.

# Заключение

В работе получены следующие основные результаты:

- Впервые численно получены функции отклика спиральных волн в активной среде. Это сделано для комплексного уравнения Гинзбурга-Ландау, которое имеет универсальный характер и применимо для любой системы реакция-диффузия вблизи бифуркации Хопфа реакционной части.
- Показано, что функции отклика имеют локализованный характер, что служит математическим выражением известного из экспериментов безразличия спиральных волн к удаленным возмущениям, и позволяет рассматривать их динамику вследствие малых возмущений как динамику локализованных частиц, несмотря на то, что выглядят спиральные волны как принципиально нелокализованные объекты.
- Исследована зависимость функций отклика от параметров среды. Показано, как приближение к особым границам в параметрическом пространстве сказывается на характере функций отклика. Эта корреляция может использоваться для предсказания новых эффектов в поведении спиральных волн под воздействием малых возмущений на основе изменения характера функций отклика.
- Проведена количественная проверка предсказаний асимптотической теории, полученных с использованием функций отклика, с результатами прямых численных экспериментов и результатами, полученными другими методами. Такая проверка проведена для двух наиболее значимых для практики эффектов:

дрейфа спиральных волн вследствие неоднородности среды, понимание которого важно в связи с проблемой стабильности сердечных аритмий, в основе которых лежат волны ри-энтри, и резонансного параметрического дрейфа, который может быть положен в основу нового метода низковольтной дефибрилляции. Во всех случаях достигнуто хорошее количественное соответствие теоретических предсказаний и результатов прямых численных расчетов.

Таким образом, на практике доказана применимость асимптотической теории дрейфа спиральных волн[74], позволяющей свести решение системы уравнений “реакция-диффузия” в частных производных (1.1) к решению системы обыкновенных уравнений (1.8), описывающей движение ядра спиральной волны и изменение ее фазы.

Разработанные численные методики могут быть использованы при нахождении функций отклика спиральных волн в других моделях, в том числе — в детальных моделях сердечной ткани.

## Благодарности

Автор благодарен своим научным консультантам Э.Э. Шнолю и В.Н. Бикташеву за постановку задачи, постоянное внимание к работе и ряд ценных советов, и Ю.Е. Елькину за стимулирующие обсуждения. Некоторые расчеты, использованные в работе, были проведены на оборудовании, любезно предоставленном А.В. Холденом (Leeds University, Великобритания).

# Литература

## [A] Публикации автора по теме диссертации.

- [1] I. V. Biktasheva. Drift of spiral waves in the complex Ginzburg-Landau equation due to media inhomogeneities. *Phys. Rev. E*, 62(6), Dec 2000. to appear.
- [2] I. V. Biktasheva and V.N.Biktashev. Response functions of spiral wave solutions of the complex Ginzburg-Landau equation. *J. Nonlin. Math. Phys.*, 8 Suppl., Feb 2001. to appear.
- [3] I. V. Biktasheva, Y. E. Elkin, and V. N. Biktashev. Resonant drift of spiral waves in the complex Ginzburg-Landau equation. *J. Biol. Phys.*, 25:115–127, 1999.
- [4] I. V. Biktasheva, Yu. E. Elkin, and V.N.Biktashev. Resonant drift of spiral waves in the Complex Ginzburg-Landau Equation. In *Nonlinear Phenomena in Biology*, page 7, Pushchino, Russia, Jun 1998. Institute of Cell Biophysics of R.A.S.
- [5] I. V. Biktasheva, Yu. E. Elkin, and V. N. Biktashev. Localized sensitivity of spiral waves in the Complex Ginzburg-Landau Equation. *Phys. Rev. E*, 57(3):2656–2659, 1998.

## [B] Другая цитированная литература.

- [6] G. R. Mines. On dynamic equilibrium in the heart. *J. Physiol.*, 46:349–382, 1913.
- [7] W. E. Garey. The nature of fibrillaory contraction of the heart — its relation to tissue mass and form. *Am. J. Physiol.*, 33:397–414, 1914.

- [8] N. Wiener N and A. Rosenblueth. The mathematical formulation of the problem of conduction of impulses in a network of connected excitable elements, specifically in cardiac muscle. *Arch. Inst. Cardiologia de Mexico*, 16(3–4):205, 1946. Русский перевод в: Кибернетический сборник, №3, М., ИЛ, 1961.
- [9] И. М. Гельфанд, М. Л. Цетлин. О непрерывных моделях управляемых систем. *Доклады АН СССР*, 131(6):1242, 1961.
- [10] И. С. Балаховский. Некоторые режимы движения возбуждения в идеальной возбудимой ткани. *Биофизика*, 10(6):1063–1067, 1965.
- [11] В. И. Кринский. Фибрилляция в возбудимых средах. *Проблемы Кибернетики*, 2(1):59–80, 1968.
- [12] А. М. Жаботинский, А. Н. Заикин. Пространственные явления в автоколебательной системе. В сб. Е.Е. Сельков, А. М. Жаботинский, С. Э. Шноль (ред.), *Колебательные процессы в биологических и химических системах*, стр. 279. Наука, Пущино, 1971.
- [13] M. A. Allessie, F. I. M. Bonk, and Schopman F.J.G. Circus movement in rabbit atrial muscle as a mechanism of tachycardia. *Circ. Res.*, 33:54–62, 1973.
- [14] Gorelova N.A. and Bures J. Spiral waves of spreading depression in the isolated chicken retina. *J. Neurobiol.*, 14:353–363, 1983.
- [15] Alcantara F. and Monk M. Signal propagation during aggregation in the slime mold *Dictyostelium Discoideum*. *J. Gen. Microbiol.*, 85:321–334, 1974.
- [16] J. Lechleiter, S. Girard, E. Peralta, and D. Clapham. Spiral calcium wave propagation and annihilation in *Xenopus Laevis* oocytes. *Science*, 252(5002), 1991.
- [17] S. Jakubith, H. H. Rotermund, W. Engel, A. von Oertzen, and G. Ertl. Spatiotemporal concentration patterns in a surface reaction — propagating and standing waves, rotating spirals, and turbulence. *Phys. Rev. Lett.*, 65(24):3013–3016, 1990.

- [18] K. Agladze and O. Steinbock. Waves and vortices of rust on the surface of corroding steel. *J. Phys. Chem.*, 2000. to appear.
- [19] T. Frisch, S. Rica, P. Coullet, and J.M. Gilli. Spiral waves in liquid crystal. *Phys. Rev. Lett.*, 72(10):1471–1474, 1994.
- [20] D. J. Yu, W. P. Lu, and R. G. Harrison. Dynamic bistability and spiral waves in a laser. *Journal of Optics B — Quantum and Semiclassical Optics*, 1(1):25–30, 1999.
- [21] F. X. Witkowski, L. J. Leon, P. A. Penkoske, W. R. Giles, M. L. Spano, W. L. Ditto, and A. T. Winfree. Spatiotemporal evolution of ventricular fibrillation. *Nature*, 392:78–82, 1998.
- [22] R. A. Gray, A. M. Pertsov, and Jalife J. Spatial and temporal organization during ventricular fibrillation. *Nature*, 392:75–78, 1998.
- [23] A. L. Hodgkin and A. F. Huxley. A quantitative description of membrane current and its application to conduction and excitation in nerve. *J. Physiol.*, 117, 1952.
- [24] D. Noble. A modification of the Hodgkin-Huxley equations applicable to Purkinje fibre action and pace-maker potentials. *J. Physiol.*, 160:317–352, 1962.
- [25] D. Noble. *Oxsoft HEART Version 3.8 manual*. Oxsoft, Oxford, 1990.
- [26] D. Noble, A. Varghese, P. Kohl, and P. Noble. Improved guinea pig ventricular cell model incorporating a diadic space, IKr and IKs, and length and tension dependent processes. *Can J. Cardiol.*, 14:123–34, 1998.
- [27] C. H. Luo and Y Rudy. A dynamic model of the cardiac ventricular action-potential. *Circulation Research*, 74(6):1071–1096, 1097–1113, 1994.
- [28] A. Nygren, C. Fiset, L. Firek, J.W. Clark, D.S. Lindblad, R.B. Clark, and W.R. Giles. Mathematical model of an adult human atrial cell. the role of  $K^+$  currents in repolarization. *Circ. Res.*, 82:63–81, 1998.

- [29] А. М. Перцов, А. В. Панфилов. *Сpiralные волны в актических средах. Резербератор в системе ФитиХюо-Нагумо*, стр. 77–84. ИПФ, Горький, 1981.
- [30] P. S. Hagan. Spiral waves in reaction-diffusion equations. *SIAM J. Appl. Math.*, 42:762–786, 1982.
- [31] A. T. Winfree. Varieties of spiral wave behavior in excitable media. *Chaos*, 1(3):303–334, 1991.
- [32] M. Courtemanche and A. T. Winfree. Re-entrant rotating waves in a Beeler-Reuter based model of two-dimensional cardiac conduction. *Int. J. of Bifurcation and Chaos*, 1:431–444, 1991.
- [33] V. I. Krinsky and I. R. Efimov. Vortices with linear cores in mathematical-models of excitable media. *Physica A*, 188(1–3):55–60, 1992.
- [34] V. N. Biktashev and A. V. Holden. Control of re-entrant activity in a model of mammalian atrial tissue. *Proc. Roy. Soc. Lond. ser. B*, 260:211–217, 1995.
- [35] V. N. Biktashev and A. V. Holden. Re-entrant activity and its control in a model of mammalian ventricular tissue. *Proc. Roy. Soc. Lond. ser. B*, 263:1373–1382, 1996.
- [36] Y. Kuramoto and S. Koga. Turbulized rotating chemical waves. *Prog. Theor. Phys.*, 66:1081–1085, 1981.
- [37] V. I. Krinsky, A. M. Pertsov, and V.N. Biktashev. Autowave approaches to cessation of reentrant arrhythmias. *Ann. N. Y. Acad. Sci.*, 591:232–246, 1990.
- [38] V. Krinsky, A. Pertsov, V. Fast, and V. Biktashev. A study of the autowave mechanisms of cardiac arrhythmias. In A. V. Holden, M. Markus, and H. G. Othmer, editors, *Nonlinear Wave Processes in Excitable Media*, pages 5–13. Plenum Press, New York, 1991.
- [39] A. V. Panfilov and A. V. Holden. Spatio-temporal irregularity in a two-dimensional model of cardiac tissue. *Int. J. of Bifurcation and Chaos*, 1:219–225, 1991.

- [40] V. N. Biktashev. A three-dimensional autowave turbulence. *Int. J. of Bifurcation and Chaos*, 8(4):677–684, 1998.
- [41] A. F. M. Marée and A. V. Panfilov. Spiral breakup in excitable tissue due to lateral instability. *Phys. Rev. Lett.*, 78(9):1819–1822, 1997.
- [42] F. Fenton and A. Karma. Fiber rotation induced vortex turbulence in thick myocardium. *Phys. Rev. Lett.*, 81(2):481–484, 1998.
- [43] O.E. Rossler and C. Kahlert. Winfree meandering in a 2-dimensional 2-variable excitable medium. *Z. Naturforsch.*, 34:565–570, 1979.
- [44] B. C. Зыков. Циклоидная циркуляция спиральных волн в возбуждимой среде. *Биофизика*, 31(5):862–865, 1986.
- [45] B. C. Зыков. Кинематика нестационарной циркуляции спиральных волн в возбуждимой среде. *Биофизика*, 32(2):337–334, 1987.
- [46] D. Barkley, M. Knobell, and L. S. Tuckerman. Spiral-wave dynamics in a simple-model of excitable media - the transition from simple to compound rotation. *Physical Review A*, 42(4):2489–2492, 1990.
- [47] A. Karma. Meandering transition in two-dimensional excitable media. *Phys. Rev. Lett.*, 65:2824–2827, 1990.
- [48] W. Jahnke and A. T. Winfree. A survey of spiral wave behavior in the oregonator model. *Int. J. of Bifurcation and Chaos*, 1(2):445–466, 1991.
- [49] C. F. Starmer and J. Starobin. Spiral tip movement: The role of the action potential wavelength in polymorphic cardiac arrhythmias. *Int. J. Bifurcation and Chaos*, 6(10):1909–1923, 1996.
- [50] V. N. Biktashev and A. V. Holden. Deterministic Brownian motion in the hypermeander of spiral waves. *Physica D*, 116(3–4):342–354, 1998.

- [51] Е. А. Ермакова, А. М. Перцов. Взаимодействие вращающихся спиральных волн с границей. *Биофизика*, 31:855–861, 1986.
- [52] Е. А. Ермакова, А. М. Перцов, Э. Э. Шноль. Пары взаимодействующих вихрей в двумерных активных средах. препринт ОНТИ НЦБИ, 1987.
- [53] А. М. Перцов, Е. А. Ермакова. Механизм дрейфа спиральной волны в неоднородной среде. *Биофизика*, 33:338–342, 1988.
- [54] E. A. Ermakova, A. M. Pertsov, and E. E. Shnol. On the interaction of vortices in two-dimensional active media. *Physica D*, 40:185–195, 1989.
- [55] В. Н. Бикташев. Эволюция вихрей в активных средах. Дисс. к.ф.-м.н., МФТИ, 1989.
- [56] V. N. Biktashev. A three-dimensional autowave turbulence. *Int. J. of Bifurcation and Chaos*, 8(4):677–684, 1998.
- [57] Ott E. Hendrey M. and Antonsen T.M. Spiral wave dynamics in oscillatory inhomogeneous media. *Phys. Rev. E.*, 61:4943–4953, 2000.
- [58] В. А. Давыдов, В. С. Зыков, А. С. Михайлов, П. К. Бражник. Дрейф и резонанс спиральных волн в активной среде. *Изв. ВУЗов - Радиофизика*, 31:574–582, 1988.
- [59] V. A. Davydov, A. S. Mikhailov, and V. S. Zykov. Kinematical theory of autowave patterns in excitable media. In A. Crighton and Yu. Engelbicht, editors, *Nonlinear Waves in Active Media*, pages 38–51, Berlin, 1989. Springer Verlag.
- [60] В. А. Давыдов, В. С. Зыков, А. С. Михайлов. Кинематика автоволновых структур в возбудимых средах. *УФН*, 161:45–85, 1991.
- [61] A. S. Mikhailov, V. A. Davydov, and V. S. Zykov. Complex dynamics of spiral waves and motion of curves. *Physica D*, 70:1–39, 1994.

- [62] Y. E. Elkin and V. N. Biktashev. Drift of large-core spiral waves in inhomogeneous excitable media. *J. Biol. Phys.*, 25(2):129–147, 1999.
- [63] P. C. Fife. Singular perturbation and wave front techniques in reaction-diffusion problems. *SIAM-AMS Proceedings*, 10:23–50, 1976.
- [64] J. J. Tyson and J. P. Keener. Singular perturbation theory of traveling waves in excitable media (a review). *Physica D*, 32:327–361, 1988.
- [65] A. Karma. Universal limit of spiral wave propagation in excitable media. *Phys. Rev. Lett.*, 66:2274–2277, 1991.
- [66] P. Pelce and J. Sun. Wave front interaction in steadily rotating spirals. *Physica D*, 48:353–366, 1991.
- [67] I. Aranson, D. Kessler, and I. Mitkov. Drift of spiral waves in excitable media. *Physica D*, 85:142–155, 1995.
- [68] D. A. Kessler and R. Kupferman. Spirals in excitable media: the free-boundary limit with diffusion. *Physica D*, 97:509–516, 1996.
- [69] V. Hakim and A. Karma. Spiral wave meander in excitable media: the large core limit. *Phys. Rev. Lett.*, 79:665–668, 1997.
- [70] V. Hakim and A. Karma. Theory of spiral wave dynamics in weakly excitable media: Asymptotic reduction to a kinematic model and applications. *Phys. Rev. E*, 60(5):5073–5105, 1999.
- [71] L. Yakushevich. Vortex filament elasticity in active medium. *Studia Biophysica*, 100(3):195–200, 1984.
- [72] Keener J.P. The dynamics of 3-dimensional scroll waves in excitable media. *Physica D*, 31(2):269–276, 1988.

- [73] V. N. Biktashev. Evolution of twist of an autowave vortex. *Physica D*, 36(2):167–172, 1989.
- [74] Biktashev V.N. and Holden A.V. Resonant drift of autowave vortices in 2d and the effects of boundaries and inhomogeneities. *Chaos, Solitons and Fractals*, 5:575–622, 1995.
- [75] C. F. Starmer, V. I. Krinsky, V. N. Biktashev, D. N. Romashko, O. N. Makarova, and M. R. Stepanov. Vulnerability in an excitable medium: Analytical and numerical studies of initiating unidirectional propagation. *Biophysical Journal*, 65(5):1775–1787, 1993.
- [76] К. И. Агладзе, В.А. Давыдов, А.С. Михайлов. Наблюдение резонанса спиральных волн в возбудимой распределенной среде. *Письма в ЖЭТФ*, 45(12):601–605, 1987.
- [77] V. N. Biktashev and A. V. Holden. Design principles of a low-voltage cardiac defibrillator based on the effect of feed-back resonant drift. *J. Theor. Biol.*, 169(2):101–113, 1994.
- [78] I. S. Aranson, L. Aranson, K. Kramer, and Weber A. Stability limits of spirals and travelling waves in nonequilibrium media. *Phys. Rev. A*, 46(6):R2992–2993, 1992.
- [79] О. А. Морнев, А. В. Панфилов, Р. Р. Алиев. Система уравнений ФитцХью-Нагумо — градиентная система. *Биофизика*, 37(1):123–125, 1992.
- [80] J. M. Greenberg. Spiral waves for  $\lambda - \omega$  systems. *SIAM J. Appl. Math.*, 39:301–309, 1980.
- [81] A.V. Holden. Defibrillation in models of cardiac muscle. *J. Theoretical Medicine*, 1:91–102, 1997.
- [82] Pertsov A.M. Wellner M. and Jalife J. Spatial Doppler anomaly in an excitable medium. *Phys. Rev. E*, 54:1120–1125, 1996.

- [83] Фаст В.Г., Перцов А.М. Дрейф вихря в миокарде. *Биофизика*, 35:478–482, 1990.
- [84] J. M. Davidenko, A. M. Pertsov, R. Salamonsz, W. Baxter, and J. Jalife. Stationary and drifting spiral waves of excitation in isolated cardiac tissue. *Nature*, 335:349–351, 1992.
- [85] Nagy-Ungvarai Z. Markus M. and Hess B. Phototaxis of spiral waves. *Science*, 257:225–227, 1992.
- [86] М. Я. Маров, А. В. Колесниченко. *Введение в планетную аэрономию*, стр. 341–353. Наука, Москва, 1987.

# Приложение А

## Вывод уравнений для функций отклика в комплексном уравнении Гинзбурга-Ландау.

### A.1 Нелинейная задача.

Будем искать решение невозмущенного ( $\epsilon \mathbf{h} = \mathbf{0}$ ) уравнения (2.6) в виде равномерно вращающейся спиральной волны в полярной системе координат:

$$\mathbf{U}(\rho, \vartheta, t) = a(\rho) \exp \{ \mathbf{I}(\psi(\rho) + \vartheta + \omega t) \}. \quad (\text{A.1})$$

Подставим (A.1) в (2.6). Получим:

$$\begin{aligned} & \mathbf{I}\omega a(\rho) \exp \{ \mathbf{I}(\psi(\rho) + \vartheta + \omega t) \} = \\ & = [1 - (1 - \mathbf{I}\alpha)a^2(\rho)] a(\rho) \exp \{ \mathbf{I}(\psi(\rho) + \vartheta + \omega t) \} + (1 + \mathbf{I}\beta) \left[ \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial \vartheta^2} \right], \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \rho} &= a'(\rho) \exp \{ \mathbf{I}(\psi(\rho) + \vartheta + \omega t) \} + \mathbf{I}\psi'(\rho)a(\rho) \exp \{ \mathbf{I}(\psi(\rho) + \vartheta + \omega t) \}, \\ \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial \rho^2} &= a''(\rho) \exp \{ \mathbf{I}(\psi(\rho) + \vartheta + \omega t) \} - (\psi'(\rho))^2 a(\rho) \exp \{ \mathbf{I}(\psi(\rho) + \vartheta + \omega t) \} + \\ &+ \mathbf{I}[2\psi'(\rho)a'(\rho) \exp \{ \mathbf{I}(\psi(\rho) + \vartheta + \omega t) \} + \psi''(\rho)a(\rho) \exp \{ \mathbf{I}(\psi(\rho) + \vartheta + \omega t) \}], \\ \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial \vartheta^2} &= -a(\rho) \exp \{ \mathbf{I}(\psi(\rho) + \vartheta + \omega t) \}. \end{aligned}$$

Таким образом, после сокращения на  $\exp \{ \mathbf{I}(\psi(\rho) + \vartheta + \omega t) \}$  и приведения подобных получим:

$$\begin{aligned} a'' + a'\left(\frac{1}{\rho} - 2\beta\psi'\right) + a\left[1 - a^2 - (\psi')^2 - \frac{1}{\rho^2} - \beta\left(\psi'' + \frac{\psi'}{\rho}\right)\right] + \\ + \mathbf{I}\left[\psi''a + \psi'\left(2a' + \frac{a}{\rho}\right) - \beta(\psi')^2a + a(\alpha a^2 - \omega) + \beta\left(a'' + \frac{a'}{\rho} - \frac{a}{\rho^2}\right)\right] = 0 \quad (\text{A.2}) \end{aligned}$$

Уравнение (A.2) можно переписать в виде вещественной системы двух уравнений:

$$a'' + a'\left(\frac{1}{\rho} - 2\beta\psi'\right) + a\left[1 - a^2 - (\psi')^2 - \frac{1}{\rho^2} - \beta\left(\psi'' + \frac{\psi'}{\rho}\right)\right] = 0, \quad (\text{A.3})$$

$$\psi''a + \psi'\left(2a' + \frac{a}{\rho}\right) - \beta(\psi')^2a + a(\alpha a^2 - \omega) + \beta\left(a'' + \frac{a'}{\rho} - \frac{a}{\rho^2}\right) = 0. \quad (\text{A.4})$$

Эта система неудобна тем, что вторые производные  $a''$  и  $\psi''$  входят в оба уравнения.

Поэтому удобнее взять линейные комбинации уравнений:

$$\frac{(\text{A.3}) + \beta(\text{A.4})}{1 + \beta^2} \text{ и } \frac{-\beta(\text{A.3}) + (\text{A.4})}{1 + \beta^2},$$

что приводит к системе уравнений:

$$\begin{aligned} a'' + \frac{a'}{\rho} + \frac{a}{1 + \beta^2} [1 - a^2 + \beta(\alpha a^2 - \omega^2)] - a(\psi')^2 - \frac{a}{\rho^2} = 0, \\ \psi'' + \frac{\psi'}{\rho} + \frac{2a'\psi'}{a} + \frac{1}{1 + \beta^2} [\alpha a^2 - \omega + \beta a^2 - \beta] = 0 \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} a'' + \frac{a'}{\rho} + \frac{a}{1 + \beta^2} \left[1 + (\alpha\beta - 1)a^2 - \beta\omega - (1 + \beta^2) \left((\psi')^2 + \frac{1}{\rho^2}\right)\right] = 0, \\ \psi'' + \frac{\psi'}{\rho} + \frac{2a'\psi'}{a} + \frac{1}{1 + \beta^2} [(\alpha + \beta)a^2 - \omega - \beta] = 0. \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Подставим сюда вместо  $\omega$  ее значение для данного  $k$ :  $\omega = \omega(\alpha, \beta, k)$ , получим:

$$\begin{aligned} a'' + \frac{1}{\rho} a' + \left(1 - a^2 - (\psi')^2 - \frac{1}{\rho^2}\right) a - \frac{\beta(\alpha + \beta)}{1 + \beta^2} (1 - a^2 - k^2) a &= 0, \\ \psi'' + \left(2 \frac{a'}{a} + \frac{1}{\rho}\right) \psi' - \frac{\alpha + \beta}{1 + \beta^2} (1 - a^2 - k^2) &= 0. \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Зависимость

$$\omega = \omega(\alpha, \beta, k) = \alpha - \alpha k^2 - \beta k^2 \quad (\text{A.7})$$

была получена следующим образом. Ищется решение КУГЛ (2.6) в виде:

$$u = A e^{\mathbf{I}(kx + \omega t)} = A e^{\mathbf{I}\psi} e^{\mathbf{I}\omega t},$$

где

$$A = \text{const}, \quad \omega = \text{const}, \quad \psi = kx.$$

Это дает:

$$\mathbf{I}\omega A e^{\mathbf{I}(kx + \omega t)} = [1 - (1 - \mathbf{I}\alpha)A^2] A e^{\mathbf{I}(kx + \omega t)} - (1 + \mathbf{I}\beta)k^2 A e^{\mathbf{I}(kx + \omega t)}.$$

После сокращения на  $e^{\mathbf{I}(kx + \omega t)}$  получаем:

$$1 - A^2 - k^2 + \mathbf{I}(\alpha A^2 - \beta k^2 - \omega) = 0.$$

Выделяя вещественную и мнимую части, получим систему уравнений:

$$1 - A^2 - k^2 = 0,$$

$$\alpha A^2 - \beta k^2 - \omega = 0,$$

откуда следует:

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{1 - k^2}, \\ \omega &= \alpha - \alpha k^2 - \beta k^2. \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

**Границные условия.** Будем искать решения, у которых  $a$  ограничено при  $\rho \rightarrow 0$  и стремится к константе при  $\rho \rightarrow \infty$ .

$\rho \rightarrow 0$ . Будем предполагать, что главные члены асимптотик имеют вид:

$$a \approx a_0 \rho^m,$$

$$\psi' \approx \psi_0 \rho^n,$$

и, соответственно,

$$a' \approx m a_0 \rho^{m-1},$$

$$a'' \approx m(m-1) a_0 \rho^{m-2},$$

$$\psi'' \approx n \psi_0 \rho^{n-1}.$$

Подстановка этих выражений в (A.5) дает:

$$\begin{aligned} m(m-1)a_0\rho^{m-2} + ma_0\rho^{m-2} + \frac{1-\beta\omega}{1+\beta^2}a\rho^m + \frac{\alpha\beta-1}{1+\beta^2}a_0^3\rho^{3m} - a_0\psi_0\rho^{m+2n} - a_0\rho^{m-2} &= 0, \\ n\psi_0\rho^{n-1} + \psi_0\rho^{n-1} + 2m\psi_0\rho^{n-1} + \frac{\alpha+\beta}{1+\beta^2}a_0^2\rho^{2m} - \frac{\omega+\beta}{1+\beta^2} &= 0. \end{aligned}$$

Выделяя старшие члены и пренебрегая младшими, получим:

$$m^2 - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad m = 1 \quad (\text{нужны ограниченные решения}),$$

$$(2m+n+1)\psi_0\rho^{n-1} - \frac{\omega+\beta}{1+\beta^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad n = 1 \quad \text{и} \quad \psi_0 = \frac{\omega+\beta}{4(1+\beta^2)}.$$

Таким образом, при  $\rho \rightarrow 0$  мы можем подставить граничные условия:

$$\begin{aligned} a &= a'\rho, \\ \psi' &= \frac{\rho(\omega+\beta)}{4(1+\beta^2)}. \end{aligned} \tag{A.9}$$

$\rho \rightarrow \infty$ . Будем искать асимптотики в виде:

$$a \approx a_0 + a_1 \rho^{-1},$$

$$\psi' \approx \psi_0 + \psi_1 \rho^{-1},$$

$$a_0 > 0,$$

$$\psi_0 > 0,$$

и, соответственно,

$$a' \approx -a_1\rho^{-2},$$

$$a'' \approx 2a_1\rho^{-3},$$

$$\psi'' \approx -\psi_1\rho^{-2}.$$

Подстановка этих выражений в (A.5) приводит к системе уравнений:

$$\begin{aligned} 2a_1\rho^{-3} - a_1\rho^{-3} + \frac{1-\beta\omega}{1+\beta^2}(a_0 + a_1\rho^{-1}) + \frac{\alpha\beta-1}{1+\beta^2}(a_0 + a_1\rho^{-1})^3 - \\ - (a_0 + a_1\rho^{-1})(\psi_0 + \psi_1\rho^{-1})^2 - a_0\rho^{-2} - a_1\rho^{-3} = 0, \\ -\psi_1\rho^{-2} + \psi_0\rho^{-1} + \psi_1\rho^{-2} - \frac{2a_1\rho^{-2}(\psi_0 + \psi_1\rho^{-1})}{a_0 + a_1\rho^{-1}} + \frac{\alpha+\beta}{1+\beta^2}(a_0 + a_1\rho^{-1})^2 - \frac{\omega+\beta}{1+\beta^2} = 0. \end{aligned}$$

Выделяя в этих уравнениях сначала старшие члены, а потом — следующие за ними, получим:

$$\begin{aligned} \frac{1-\beta\omega}{1+\beta^2}a_0 + \frac{\alpha\beta-1}{1+\beta^2}a_0^3 - a_0\psi_0^2 = 0, \\ \frac{1-\beta\omega}{1+\beta^2}a_1 + 3\frac{\alpha\beta-1}{1+\beta^2}a_0^2a_1 - 2a_0\psi_0\psi_1 - a_1\psi_0^2 = 0, \\ \frac{\alpha+\beta}{1+\beta^2}a_0^3 - \frac{\omega+\beta}{1+\beta^2}a_0 = 0, \\ \psi_0a_0 + 3\frac{\alpha+\beta}{1+\beta^2}a_0^2a_1 - \frac{\omega+\beta}{1+\beta^2}a_1 = 0, \end{aligned}$$

откуда последовательно получаем:

$$a_0^2 = \frac{\omega+\beta}{\alpha+\beta} = 1 - k^2 \quad \Rightarrow \quad a_0 = \sqrt{1 - k^2},$$

$$\psi_0^2 = \frac{1-\beta\omega}{1+\beta^2} + \frac{\alpha\beta-1}{1+\beta^2}(1 - k^2) = k^2 \quad \Rightarrow \quad \psi_0 = k,$$

$$a_1 = -\frac{k(1+\beta^2)}{2(\alpha+\beta)\sqrt{1-k^2}},$$

$$\psi_1 = \frac{1-\alpha\beta}{2(\alpha+\beta)}.$$

Таким образом, при  $\rho \rightarrow \infty$  можно взять граничные условия:

$$a = \sqrt{1 - k^2} - \frac{k(1 + \beta^2)}{2\rho(\alpha + \beta)\sqrt{1 - k^2}}, \quad (\text{A.10})$$

$$\psi' = k + \frac{1 - \alpha\beta}{2\rho(\alpha + \beta)}. \quad (\text{A.11})$$

## A.2 Вывод уравнений для функций отклика

Функциями отклика называются решения сопряженной линеаризованной задачи. Мы будем искать их в таком порядке: сначала линеаризуем КУГЛ на решении типа спиральной волны

$$\mathbf{U} = \exp \{ \mathbf{I}\vartheta + \mathbf{I}\omega t \} \mathbf{P}(\rho), \quad (\text{A.12})$$

здесь  $\vartheta, \rho$  — полярные координаты,  $\omega$  — угловая скорость.

После этого получим сопряженное к данному линеаризованному КУГЛ уравнение.

**Линеаризуем КУГЛ (2.6) на решении (A.12)** Подставим (A.12) в (2.6) и, сократив на  $\exp \{ \mathbf{I}(\vartheta + \omega t) \}$ , получим уравнение:

$$\mathbf{I}\omega \mathbf{P} = \mathbf{P} - (1 - \mathbf{I}\alpha) \mathbf{P} \langle \bar{\mathbf{P}}, \mathbf{P} \rangle + (1 + \mathbf{I}\beta) \left\{ \mathbf{P}'' + \frac{1}{\rho} \mathbf{P}' - \frac{1}{\rho^2} \mathbf{P} \right\}.$$

После приведения подобных получим уравнение для  $\mathbf{P}$ :

$$\mathbf{P} \{ 1 - (1 - \mathbf{I}\alpha) \langle \bar{\mathbf{P}}, \mathbf{P} \rangle - \mathbf{I}\omega \} + (1 + \mathbf{I}\beta) \left\{ \mathbf{P}'' + \frac{1}{\rho} \mathbf{P}' - \frac{1}{\rho^2} \mathbf{P} \right\} = 0, \quad (\text{A.13})$$

которое с граничными условиями:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(0) &= 0, \\ \mathbf{P}(\rho \rightarrow \infty) &\approx \sqrt{1 - k^2} \exp(\mathbf{I}k\rho) \mathbf{1} \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

дает нам краевую задачу для нахождения решения (A.12) - так называемого "решения нелинейной задачи".

Теперь будем искать решение возмущенного уравнения (2.6) в виде линейной комбинации:

$$\mathbf{u} = \mathbf{U} + \mathbf{v}, \quad (\text{A.15})$$

где  $\mathbf{U}$  - решение системы [A.12 – A.14], а  $\mathbf{v}$  - некоторая малая поправка к нему.

Чтобы найти систему уравнений для  $\mathbf{v}$ , подставим A.15 в (2.6), но перед этим обозначим

$$\mathbf{f}(\mathbf{u}) = \mathbf{u} - (\mathbf{1} - \mathbf{I}\alpha)\mathbf{u} |\mathbf{u}|^2.$$

Тогда во вращающейся с угловой скоростью  $\omega$  системе координат уравнение (2.6) запишется в виде:

$$\partial_t \mathbf{u} = \mathbf{f}(\mathbf{u}) - \omega \partial_\theta \mathbf{u} + (\mathbf{1} + \mathbf{I}\beta) \nabla^2 \mathbf{u}. \quad (\text{A.16})$$

Теперь подставим решение A.15 в уравнение A.16 и получим уравнение для  $\mathbf{v}$ :

$$\partial_t \mathbf{v} = \left( \frac{\partial f}{\partial u} \right)_{u=\mathbf{U}(\vec{r})} \mathbf{v} - \omega \partial_\theta \mathbf{v} + (\mathbf{1} + \mathbf{I}\beta) \nabla^2 \mathbf{v}. \quad (\text{A.17})$$

Уравнение (A.17) - линеаризованное уравнение Гинзбурга-Ландау дает нам малую поправку  $\mathbf{v}$  в решении (A.15). Чтобы найти функции отклика для КУГЛ, нужно получить уравнение, сопряженное уравнению (A.17).

**Найдем уравнение, сопряженное уравнению (A.17)** Обозначим

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \left( \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} \right)_{\mathbf{u}=\mathbf{U}(\vec{r})}, \\ \tilde{\mathcal{L}} &= \mathbf{F} - \omega \partial_\theta + \mathbf{D} \nabla^2, \end{aligned}$$

Тогда оператор, сопряженный к  $\tilde{\mathcal{L}}$ , будет иметь вид:

$$\tilde{\mathcal{L}}^+ = \mathbf{D}^T \nabla^2 + \omega \partial_\theta + \mathbf{F}^T,$$

а уравнением, определяющим функции чувствительности для КУГЛ, будет:

$$\tilde{\mathcal{L}}^+ \mathbf{W}_n = -i\omega n \mathbf{W}_n, \quad n = 0, \pm 1 \quad (\text{A.18})$$

Найдем  $\mathbf{F}^T$ . Если

$$\mathbf{f}(\mathbf{u}) = \mathbf{u} - (1 - \alpha\mathbf{I})|\mathbf{u}|^2\mathbf{u},$$

то

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} = 1 - (1 - \alpha\mathbf{I})\frac{\partial |\mathbf{u}|^2 \mathbf{u}}{\partial \mathbf{u}},$$

т.е. нам нужна производная от  $\mathbf{g} = |\mathbf{u}|^2 \mathbf{u}$  по  $\mathbf{u}$ . Заметим, что  $\mathbf{g}(\mathbf{u})$  — функция неаналитическая, если рассматривать ее как функцию комплексного переменного в классическом смысле; однако нас она интересует как векторная функция векторного аргумента, и дифференцирование следует производить покомпонентно.

Пусть

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1 + v_1 \\ U_2 + v_2 \end{bmatrix},$$

тогда

$$\mathbf{g}(\mathbf{u}) = (u_1^2 + u_2^2) \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}.$$

Линеаризуя это выражение по  $v_{1,2}$ , получим:

$$\begin{aligned} \mathbf{g}(\mathbf{u}) &= (U_1^2 + 2U_1v_1 + U_2^2 + 2U_2v_2 + \dots) \begin{bmatrix} U_1 + v_1 \\ U_2 + v_2 \end{bmatrix} = \\ &= (U_1^2 + U_2^2) \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} + (2U_1v_1 + 2U_2v_2) \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} + (U_1^2 + U_2^2) \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \\ &= \mathbf{g}\mathbf{U} + \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{u}}\mathbf{v}, \end{aligned}$$

то есть

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{u}}\mathbf{v} &= (2U_1v_1 + 2U_2v_2) \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} + (U_1^2 + U_2^2) \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 2U_1^2v_1 + 2U_1U_2v_2 + U_1^2v_1 + U_2^2v_1 \\ 2U_1U_2v_1 + 2U_2^2v_2 + U_1^2v_2 + U_2^2v_2 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 3U_1^2 + U_2^2 & 2U_1U_2 \\ 2U_1U_2 & 3U_2^2 + U_1^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned}
\mathbf{G} &\equiv \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{u}} = \begin{bmatrix} 3U_1^2 + U_2^2 & 2U_1U_2 \\ 2U_1U_2 & 3U_2 + U_1^2 \end{bmatrix} = \\
&= 2(U_1^2 + U_2^2) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + 2U_1U_2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + (U_1^2 - U_2^2) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \\
&= 2\mathbf{U}^T\mathbf{U} + (U_1^2 - U_2^2 + 2\mathbf{I}U_1U_2) \hat{\mathbf{C}} = \\
&= 2\mathbf{U}^T\mathbf{U} + (U_1 + \mathbf{I}U_2)^2 \hat{\mathbf{C}},
\end{aligned}$$

или

$$\mathbf{G} = \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{u}} = 2\mathbf{U}^T\mathbf{U} + \hat{\mathbf{U}}^2\hat{\mathbf{C}},$$

где мы ввели обозначение  $\hat{\mathbf{U}}$  для “матричной версии” вектора  $\mathbf{U}$ :

$$\hat{\mathbf{U}} = U_1 + \mathbf{I}U_2 = \begin{bmatrix} U_1 & -U_2 \\ U_2 & U_1 \end{bmatrix}, \quad (\hat{\mathbf{U}} \cdot \mathbf{1} \equiv \mathbf{U}).$$

Тогда матрица линеаризации имеет вид:

$$\begin{aligned}
\mathbf{F} &= \left( \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} \right)_{\mathbf{U}} = 1 - (1 - \alpha \mathbf{I}\mathbf{G}) = \\
&= 1 - (1 - \alpha \mathbf{I}) (2\mathbf{U}^T\mathbf{U} + \hat{\mathbf{U}}^2\hat{\mathbf{C}}) = \\
&= 1 - 2(1 - \alpha \mathbf{I})\mathbf{U}^T\mathbf{U} - (1 - \alpha \mathbf{I})\hat{\mathbf{U}}^2\hat{\mathbf{C}}.
\end{aligned}$$

Транспонирование этой матрицы дает:

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}^T &= 1 - 2\mathbf{U}^T\mathbf{U}(1 + \mathbf{I}\alpha) - \hat{\mathbf{C}}^T(\hat{\mathbf{U}}^T)^2(1 + \mathbf{I}\alpha) = \\
&= 1 - 2\mathbf{U}^T\mathbf{U}(1 + \mathbf{I}\alpha) - \hat{\mathbf{C}}(\hat{\mathbf{U}}^T)^2(1 + \mathbf{I}\alpha).
\end{aligned}$$

Заметим, что матрицы  $\hat{\mathbf{C}}$  и  $\mathbf{I}$  антисимметричны, и, следовательно, если  $\mathbf{A}$  — матрица вида  $b + \mathbf{Id}$ , то

$$\hat{\mathbf{C}}\mathbf{A} = \mathbf{A}^T\hat{\mathbf{C}}.$$

В самом деле,

$$\hat{\mathbf{C}}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b & -d \\ d & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b & -d \\ -d & -b \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A}^T \widehat{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} b & d \\ -d & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b & -d \\ -d & -b \end{bmatrix} = \widehat{\mathbf{C}} \mathbf{A}.$$

В силу этого свойства получаем:

$$\mathbf{F}^T = 1 - 2\mathbf{U}^T \mathbf{U}(1 + \mathbf{I}\alpha) - \widehat{\mathbf{U}}^2(1 - \mathbf{I}\alpha)\widehat{\mathbf{C}}$$

и сопряженный линеаризованный оператор в форме:

$$\tilde{\mathcal{L}}^+ = 1 - 2\mathbf{U}^T \mathbf{U}(1 + \mathbf{I}\alpha) - \widehat{\mathbf{U}}^2(1 - \mathbf{I}\alpha)\widehat{\mathbf{C}} + \omega \partial_\theta + (1 - \mathbf{I}\beta) \nabla^2. \quad (\text{A.19})$$

**Зависимость от угловой переменной.** Мы уже знаем, что невозмущенное решение  $\mathbf{U}$  имеет вид:

$$\mathbf{U} = \exp\{\mathbf{I}\theta\} \mathbf{P}(\rho),$$

где  $\theta$  — полярный угол во вращающейся системе координат. Покомпонентно имеем:

$$\begin{aligned} \mathbf{U} = \exp(\mathbf{I}\theta) \mathbf{P} &= \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} P_1 \cos \theta - P_2 \sin \theta \\ P_1 \sin \theta + P_2 \cos \theta \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

то есть

$$U_1 = P_1 \cos \theta - P_2 \sin \theta,$$

$$U_2 = P_1 \sin \theta + P_2 \cos \theta$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{U}} &= \begin{bmatrix} U_1 & -U_2 \\ U_2 & U_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1 \cos \theta - P_2 \sin \theta & -P_1 \sin \theta - P_2 \cos \theta \\ P_1 \sin \theta + P_2 \cos \theta & P_1 \cos \theta - P_2 \sin \theta \end{bmatrix} = \\ &= P_1 \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} + P_2 \begin{bmatrix} -\sin \theta & -\cos \theta \\ \cos \theta & -\sin \theta \end{bmatrix} = \\ &= P_1 e^{\mathbf{I}\theta} + P_2 \mathbf{I} e^{\mathbf{I}\theta} = (P_1 + \mathbf{I} P_2) e^{\mathbf{I}\theta} = \widehat{\mathbf{P}} e^{\mathbf{I}\theta}, \end{aligned}$$

где введено обозначение:

$$\widehat{\mathbf{P}} = P_1 + \mathbf{I}P_2 \quad (\widehat{\mathbf{P}}\mathbf{1} \equiv \mathbf{P}).$$

Матрица  $\widehat{\mathbf{P}}$  —  $\mathbf{I}$ -комплексное число, которое можно представить в виде:

$$\widehat{\mathbf{P}} = ae^{\mathbf{I}\psi} \quad (\mathbf{P} = ae^{\mathbf{I}\psi}\mathbf{1}),$$

где амплитуда  $a$  и фаза  $\psi$  — скалярные функции  $\rho$ .

Тогда:

$$\mathbf{U}^T \mathbf{U} = \mathbf{P}^T (e^{\mathbf{I}\theta})^T e^{\mathbf{I}\theta} \mathbf{P} = \mathbf{P}^T \mathbf{P} = |\mathbf{P}|^2 = a^2,$$

и, кроме того,

$$\widehat{\mathbf{U}}^2 = \widehat{\mathbf{P}}^2 e^{2\mathbf{I}\theta}.$$

С учетом этого сопряженный оператор приобретает вид:

$$\tilde{\mathcal{L}}^+ = 1 - 2a^2(1 + \mathbf{I}\alpha) - \widehat{\mathbf{P}}^2 e^{2\mathbf{I}\theta} (1 - I\alpha) \widehat{\mathbf{C}} + \omega \partial_\theta + (1 - \mathbf{I}\beta) \nabla^2.$$

Будем искать ФО, как решения (2.22), в виде:

$$\mathbf{W}_n(\rho, \theta) = \exp \{(\mathbf{I} - in)\theta\} \mathbf{Q}_n(\rho).$$

Тогда уравнение (2.22) принимает вид:

$$\begin{aligned} & (-i\omega n + \lambda_n) \exp ((\mathbf{I} - in)\theta) \mathbf{Q}_n(\rho) = \\ &= [1 - 2a^2(1 + \alpha\mathbf{I})] \exp ((\mathbf{I} - in)\theta) \mathbf{Q}_n(\rho) - \\ &\quad - a^2 e^{2\mathbf{I}\psi} e^{2\mathbf{I}\theta} (1 - \mathbf{I}\alpha) e^{-\mathbf{I}\theta} e^{-in\theta} \widehat{\mathbf{C}} \mathbf{Q}_n(\rho) + \omega (\mathbf{I} - in) \exp ((\mathbf{I} - in)\theta) \mathbf{Q}_n(\rho) + \\ &\quad + (1 - \mathbf{I}\beta) \cdot \\ &\quad \cdot \left[ \exp ((\mathbf{I} - in)\theta) \frac{d^2 \mathbf{Q}_n}{d\rho^2} + \exp ((\mathbf{I} - in)\theta) \frac{1}{\rho} \frac{d\mathbf{Q}_n}{d\rho} + \frac{(\mathbf{I} - in)^2}{\rho^2} \exp ((\mathbf{I} - in)\theta) \mathbf{Q}_n \right]. \end{aligned}$$

После сокращения на множитель  $\exp ((\mathbf{I} - in)\theta)$  остается только уравнение для  $\mathbf{Q}_n(\rho)$ :

$$\begin{aligned} & (1 - \mathbf{I}\beta) \left[ \frac{d^2 \mathbf{Q}_n}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d\mathbf{Q}_n}{d\rho} + \frac{(\mathbf{I} - in)^2}{\rho^2} \mathbf{Q}_n \right] + \\ & [1 - 2a^2(1 + \alpha\mathbf{I}) + \mathbf{I}\omega] \mathbf{Q}_n - a^2 e^{2\mathbf{I}\psi} (1 - \mathbf{I}\alpha) \widehat{\mathbf{C}} \mathbf{Q}_n = \lambda_n \mathbf{Q}_n. \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

Домножив это уравнение на  $\frac{1 + \mathbf{I}\beta}{1 + \beta^2}$ , окончательно получим:

$$\begin{aligned} \frac{d^2\mathbf{Q}_n}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d\mathbf{Q}_n}{d\rho} + \frac{(\mathbf{I} - in)^2}{\rho^2} \mathbf{Q}_n + \\ + \frac{1 + \mathbf{I}\beta}{1 + \beta^2} \left[ 1 - 2a^2(1 + \alpha\mathbf{I}) + \mathbf{I}\omega - a^2 e^{2\mathbf{I}\psi} (1 - \mathbf{I}\alpha) \widehat{\mathbf{C}} - \lambda_n \right] \mathbf{Q}_n = \mathbf{0}. \quad (\text{A.21}) \end{aligned}$$

### A.3 Временная мода ( $n = 0$ ).

Будем искать решение уравнения (A.21) при  $n = 0$  в виде:

$$\mathbf{Q}_0 = (A + \mathbf{I}B)e^{\mathbf{I}\psi} \mathbf{1}.$$

Тогда из уравнения (A.21) следует:

$$\begin{aligned} \{ A'' - 2B'\psi' - B\psi'' - A(\psi')^2 + \mathbf{I}[B'' + 2A'\psi' + A\psi'' - B(\psi')^2] \} e^{\mathbf{I}\psi} \mathbf{1} + \\ + \frac{1}{\rho} \{ A' - B\psi' + \mathbf{I}[B' + A\psi'] \} \exp(\mathbf{I}\psi) \mathbf{1} - \frac{1}{\rho^2} [A + \mathbf{I}B] e^{\mathbf{I}\psi} \mathbf{1} + \\ + \frac{1}{1 + \beta^2} \left\{ 1 - \lambda_0 + \mathbf{I}\omega - a^2 \left[ 2(1 + \alpha\mathbf{I}) + (1 - \alpha\mathbf{I})e^{2\mathbf{I}\psi} \widehat{\mathbf{C}} \right] \right\} (A + \mathbf{I}B) e^{\mathbf{I}\psi} \mathbf{1} + \\ + \frac{\mathbf{I}\beta}{1 + \beta^2} \left\{ 1 - \lambda_0 + \mathbf{I}\omega - a^2 \left[ 2(1 + \alpha\mathbf{I}) + (1 - \alpha\mathbf{I})e^{2\mathbf{I}\psi} \widehat{\mathbf{C}} \right] \right\} (A + \mathbf{I}B) e^{\mathbf{I}\psi} \mathbf{1} = 0. \end{aligned}$$

После раскрытия скобок и приведения подобных получаем:

$$\begin{aligned} \left\{ A'' + \frac{1}{\rho} A' + A \left[ \frac{1 - 3a^2 - \lambda_0 - \beta(\omega - \alpha a^2)}{1 + \beta^2} - \frac{1}{\rho^2} - (\psi')^2 \right] - \right. \\ \left. - 2B'\psi' - B \left[ \frac{\omega - 3\alpha a^2 + \beta(1 - a^2 - \lambda_0)}{1 + \beta^2} + \psi'' + \frac{\psi'}{\rho} \right] \right\} \begin{bmatrix} \cos \psi \\ \sin \psi \end{bmatrix} + \\ + \left\{ B'' + \frac{1}{\rho} B' + B \left[ \frac{1 - a^2 - \lambda_0 - \beta(\omega - 3\alpha a^2)}{1 + \beta^2} - \frac{1}{\rho^2} - (\psi')^2 \right] + \right. \\ \left. + 2A'\psi' + A \left[ \frac{\omega - \alpha a^2 + \beta(1 - 3a^2 - \lambda_0)}{1 + \beta^2} + \psi'' + \frac{\psi'}{\rho} \right] \right\} \begin{bmatrix} -\sin \psi \\ \cos \psi \end{bmatrix} = 0. \quad (\text{A.22}) \end{aligned}$$

Из нелинейной задачи известно, что

$$\psi'' + \frac{\psi'}{\rho} = \frac{\omega + \beta - (\alpha + \beta)a^2}{1 + \beta^2} - \frac{2a'\psi'}{a}. \quad (\text{A.23})$$

Тогда (A.22) можно переписать в виде системы уравнений:

$$\begin{aligned} A'' + \frac{1}{\rho} A' + A \left[ \frac{1 - 3a^2 - \lambda_0 - \beta(\omega - \alpha a^2)}{1 + \beta^2} - \frac{1}{\rho^2} - (\psi')^2 \right] - \\ - 2B'\psi' - 2B \left[ \frac{\omega + \beta(1 - \frac{\lambda_0}{2}) - (2\alpha + \beta)a^2}{1 + \beta^2} - \frac{a'\psi'}{a} \right] = 0 \\ B'' + \frac{1}{\rho} B' + B \left[ \frac{1 - a^2 - \lambda_0 - \beta(\omega - 3\alpha a^2)}{1 + \beta^2} - \frac{1}{\rho^2} - (\psi')^2 \right] + \\ + 2A'\psi' + 2A \left[ \frac{\omega + \beta(1 - \frac{\lambda_0}{2}) - (\alpha + 2\beta)a^2}{1 + \beta^2} - \frac{a'\psi'}{a} \right] = 0. \quad (\text{A.24}) \end{aligned}$$

**Поведение решений при  $\rho \rightarrow 0$ .** Главные члены системы (A.24) при  $\rho \rightarrow 0$  имеют вид:

$$\begin{aligned} A'' + \frac{1}{\rho} A' - \frac{1}{\rho^2} A = 0, \\ B'' + \frac{1}{\rho} B' - \frac{1}{\rho^2} B = 0, \end{aligned}$$

т.е. особенности у обоих уравнений такие же, как у уравнения Бесселя индекса 1. Отсюда можно видеть, что четыре линейно независимых решения этой системы  $A_j(\rho)$ ,  $B_j(\rho)$ ,  $j = 1, \dots, 4$  могут быть выбраны так, что

$$\begin{aligned} A_1 &= \rho + o(\rho), \quad B_1 = o(A_1), \\ B_2 &= \rho + o(\rho), \quad A_2 = o(A_1), \\ A_3 &= \rho^{-1} + o(\rho^{-1}), \quad B_3 = o(A_1), \\ B_4 &= \rho^{-1} + o(\rho^{-1}), \quad A_4 = o(A_1). \end{aligned}$$

Если  $c_j$  — коэффициенты разложения интересующего нас решения по этому базису, т.е.

$$A(\rho) = \sum_{j=1}^4 c_j A_j(\rho), \quad B(\rho) = \sum_{j=1}^4 c_j B_j(\rho),$$

то условие ограниченности решения при  $\rho \rightarrow 0$  эквивалентно двум условиям:

$$c_3 = 0,$$

$$c_4 = 0.$$

Таким образом, интересующие нас решения при  $\rho \rightarrow 0$  ведут себя как

$$\begin{aligned} A(\rho) &\sim \rho, \\ B(\rho) &\sim \rho, \end{aligned} \quad (\text{A.25})$$

а для корректности численной процедуры необходимо на левом конце наложить два граничных условия.

**Поведение решений при  $\rho \rightarrow \infty$ .** Будем искать решение системы (A.24) при больших  $\rho$  в виде:

$$\begin{aligned} A &= c_1 e^{\Lambda\rho}, \\ B &= c_2 e^{\Lambda\rho}. \end{aligned} \quad (\text{A.26})$$

Тогда, с учетом (A.11), из (A.24) следует:

$$\begin{aligned} c_1 \Lambda^2 + c_1 \left( -\frac{2a^2}{1+\beta^2} \right) - 2c_2 \Lambda k - 2c_2 \left( -\frac{\alpha a^2}{1+\beta^2} \right) &= 0, \\ c_2 \Lambda^2 + c_2 \left( \frac{2\alpha\beta a^2}{1+\beta^2} \right) + 2c_1 \Lambda k + 2c_1 \left( -\frac{\beta a^2}{1+\beta^2} \right) &= 0, \end{aligned}$$

(заметим, что в этом пределе  $a^2 \approx 1 - k^2 = \text{const}$ ) или, собрав подобные:

$$\begin{aligned} c_1 \left( \Lambda^2 - \frac{2a^2}{1+\beta^2} \right) - 2c_2 \left( \Lambda k - \frac{\alpha a^2}{1+\beta^2} \right) &= 0, \\ c_2 \left( \Lambda^2 + \frac{2\alpha\beta a^2}{1+\beta^2} \right) + 2c_1 \left( \Lambda k - \frac{\beta a^2}{1+\beta^2} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (\text{A.27})$$

Система (A.27) — линейная относительно  $c_1$  и  $c_2$ . Для того, чтобы она имела нетривиальные решения, нужно, чтобы ее детерминант был равен нулю.

Следовательно:

$$\left( \Lambda^2 - \frac{2a^2}{1+\beta^2} \right) \left( \Lambda^2 + \frac{2\alpha\beta a^2}{1+\beta^2} \right) + 4 \left( \Lambda k - \frac{\alpha a^2}{1+\beta^2} \right) \left( \Lambda k - \frac{\beta a^2}{1+\beta^2} \right) = 0.$$

После раскрытия скобок и приведения подобных оказывается, что у этого уравнения есть нулевой корень. После сокращения на  $\Lambda$  остается кубическое уравнение:

$$\Lambda^3 + 2\Lambda \left( \frac{(\alpha\beta - 1)a^2}{1+\beta^2} + 2k^2 \right) - 4k \frac{a^2(\alpha + \beta)}{1+\beta^2} = 0$$

С учетом  $a^2 = 1 - k^2$ , это уравнение принимает вид:

$$\Lambda^3 + p\Lambda + q = 0, \quad (\text{A.28})$$

где

$$p = 2 \frac{3k^2 - 1 + \beta(\alpha + k^2(2\beta - \alpha))}{1 + \beta^2},$$

$$q = -4k \frac{(\alpha + \beta)(1 - k^2)}{1 + \beta^2}.$$

Мы будем называть (A.28) характеристическим уравнением.

Стремящиеся к нулю при  $\rho \rightarrow \infty$  решения системы (A.24) должны иметь показатели  $\Lambda$  с отрицательной действительной частью. Количество таких показателей интересно обсудить в связи с количеством произвольных констант и корректностью постановки задачи.

**О количестве граничных условий и количестве корней характеристического уравнения.** Система уравнений (A.24) — линейная однородная система четвертого порядка, то есть ее общее решение зависит от четырех произвольных констант, подлежащих определению, если мы хотим выбрать единственное решение. Заметим, что в эту систему входит неизвестный параметр — собственное число  $\lambda_0$ . Таким образом, мы имеем пять неизвестных чисел, и для однозначного их определения нужны пять дополнительных конечных соотношений.

Одно соотношение, типичное и неизбежное для линейной задачи — какое-нибудь требование типа нормировки, например,  $\int_0^\infty (|A|^2 + |B|^2)\rho d\rho = 1$  или  $\max_{[0, \infty)} |A(\rho)| = 1$  и т.п. Еще два соотношения накладываются, как мы видели выше, условием ограниченности решения при  $\rho \rightarrow 0$ . Поэтому на долю предела  $\rho \rightarrow \infty$  остается ровно два ограничения.

Среди линейно независимых решений (A.24) есть решение  $(A_*(\rho), B_*(\rho))$  не убывающее и не растущее при  $\rho \rightarrow \infty$ , которому соответствует нулевой корень (A.3). Поскольку мы интересуемся решениями, исчезающими в этом пределе, мы должны потребовать, чтобы коэффициент при  $(A_*, B_*)$  обратился в ноль, что дает четвертое соотношение. Последнее, пятое конечное соотношение естественно появится,

если характеристическое уравнение (A.28) будет иметь еще и положительный корень, которому будет соответствовать линейно независимое решение, экспоненциально растущее при  $\rho \rightarrow \infty$ , и коэффициент при котором в интересующем нас решении также должен обратиться в ноль. Заметим, что если положительных корней у (A.28) окажется больше одного, то возникнут дополнительные требования обнуления коэффициентов при соответствующих растущих решениях, и задача окажется переопределенной.

Таким образом, мы пришли к следующему важному заключению:

**Предложение о локализации** *Задача о локализованной временной ФО, (1.14) при  $n = 0$ , корректно поставлена, если и только если кубическое уравнение (A.28) имеет один положительный корень и два корня с отрицательной действительной частью.*

Заметим также, что корни с отрицательной действительной частью могут быть либо оба вещественными, либо образовывать комплексную пару, для корректности постановки задачи это безразлично.

**О знаках корней характеристического уравнения.** Пусть есть полином с коэффициентами  $a_n, \dots, a_0$ . Правило Декарта гласит: если  $N$  — количество смен знака в этой последовательности (в пренебрежении нулевыми коэффициентами), тогда число вещественных положительных корней этого полинома не превосходит  $N$  и, кроме того, имеет ту же четность, что и  $N$ .

Заменив знак переменной полинома на противоположный и применив то же правило, можно получить информацию о количестве отрицательных вещественных корней.

Возможные случаи разных знаков коэффициентов  $p$  и  $q$  характеристического уравнения (A.28) и корректность задачи о локализованной ФО с точки зрения правила Декарта разобраны в таблице A.1.

Заметим что  $q$  остается отрицательным при всех разумных значениях параметров, за исключением линии  $k(\alpha, \beta) = 0$ , на которой задача в любом случае теряет смысл,

Знак $p$	Знак $q$	Число $\Lambda \in \mathbb{R}_+$	Число $\Lambda \in \mathbb{R}_-$	Задача корректна?
+	+	0	1	нет
-	+	2 или 0	1	нет
+	-	1	0	возможно
-	-	1	2 или 0	возможно

Таблица A.1: Знаки коэффициентов и корней характеристического уравнения, правило Декарта.

так как решение в виде спирали не существует.

Правило Декарта, однако, ничего не говорит о случае комплексной пары корней и о поведении вещественной части этой пары. Такую информацию дает аналог теоремы Виета для кубического уравнения. Разберем этот вопрос более подробно. Поскольку условие  $q < 0$  всегда выполнено и гарантирует наличие одного положительного корня  $\Lambda = \Lambda_* \in \mathbb{R}_+$ , то при наличии комплексной пары корней  $\Lambda = a \pm ib$  кубический полином представляется в виде

$$\Lambda^3 + p\Lambda + q = [(\Lambda - a)^2 + b^2] (\Lambda - \Lambda_*)$$

откуда имеем соотношения

$$\begin{aligned} 2a + \Lambda_* &= 0, \\ a^2 + b^2 + 2a\Lambda_* &= p, \\ -\Lambda_*(a^2 + b^2) &= q. \end{aligned}$$

Отсюда видно, что условие  $q < 0$  гарантирует как положительность вещественного корня  $\Lambda_*$  так и отрицательность вещественной части  $a$  комплексной пары  $a \pm ib$ . Знак  $p$  при этом не играет роли, за исключением того, что если  $p > 0$  то комплексная пара заведомо есть. Эта информация отображена в таблице A.2.

Таким образом, задача о локализованной временной ФО хорошо поставлена при всех значениях параметров за исключением линии  $\alpha + \beta = 0$ , на которой, впрочем, не существует сама спиральная волна. Заметим, во избежание недоразумения, что

Знак $p$	Знак $q$	Число $\Lambda \in \mathbb{R}_+$	Число $\Lambda \in \mathbb{R}_-$	Число $\operatorname{Re}(\Lambda) < 0$	Задача корректна?
+	+	0	1	1	нет
-	+	2 или 0	1	1	нет
+	-	1	0	2	да
-	-	1	2 или 0	2	да

Таблица A.2: Знаки коэффициентов и корней характеристического уравнения, правило Декарта и кубическая теорема Виета.

корректность постановки задачи здесь, конечно, еще не гарантирует существования решения задачи о локализованной ФО: даже если решение формально поставленной задачи существует, нас оно удовлетворяет только если значение искусственного собственного значения окажется малым, точнее, может быть сделано сколь угодно малым при улучшении точности расчетов.

## A.4 Пространственная мода ( $n = 1$ )

Будем искать решение уравнения (A.21) при  $n = 1$  в виде:

$$\mathbf{Q}_1 = (C + \mathbf{I}D + iE + i\mathbf{I}F)e^{\mathbf{I}\psi} \mathbf{1}.$$

Тогда из уравнения (A.21) (напомним, что  $\lambda_1 = \lambda_r + i\lambda_i$ ) следует:

$$\begin{aligned}
& [(C'' - 2D'\psi' - D\psi'' - C(\psi')^2) + \mathbf{I}(D'' + 2C'\psi' + C\psi'' - D(\psi')^2) + \\
& + i(E'' - 2F'\psi' - F\psi'' - E(\psi')^2) + i\mathbf{I}(F'' + 2E'\psi' + E\psi'' - F'(\psi')^2)] \cdot e^{\mathbf{I}\psi} \cdot \mathbf{1} + \\
& + \frac{1}{\rho} [(C' - D\psi') + \mathbf{I}(D' + C\psi') + i(E' - F\psi') + i\mathbf{I}(F' + E\psi')] e^{\mathbf{I}\psi} \cdot \mathbf{1} - \\
& - \frac{2 + 2\mathbf{I}i}{\rho^2} (C + \mathbf{I}D + iE + i\mathbf{I}F) e^{\mathbf{I}\psi} \cdot \mathbf{1} + \\
& + \frac{1 + \mathbf{I}\beta}{1 + \beta^2} \left( 1 - \lambda_r - 2a^2 + \mathbf{I}(\omega - 2\alpha a^2) - i\lambda_i - a^2 e^{2\mathbf{I}\psi} \widehat{\mathbf{C}} + \alpha a^2 \mathbf{I} e^{2\mathbf{I}\psi} \widehat{\mathbf{C}} \right) \cdot \\
& \cdot (C + \mathbf{I}D + iE + i\mathbf{I}F) e^{\mathbf{I}\psi} \cdot \mathbf{1} = 0. \tag{A.29}
\end{aligned}$$

После раскрытия скобок, учета коммутационных свойств матрицы  $\widehat{\mathbf{C}}$  и приведения подобных, это уравнение приводится к виду

$$\begin{aligned}
& \left[ C'' + \frac{1}{\rho} C' + C \left( \frac{1 - 2a^2 - \lambda_r - \beta(\omega - 2\alpha a^2) - (1 + \alpha\beta)a^2}{1 + \beta^2} - (\psi')^2 - \frac{2}{\rho^2} \right) - \right. \\
& - 2D'\psi' - D \left( \frac{\beta(1 - 2a^2 - \lambda_r) + \omega - 2\alpha a^2 - (\alpha - \beta)a^2}{1 + \beta^2} + \psi'' + \frac{\psi'}{\rho} \right) - \\
& - F \left( \frac{2}{\rho^2} + \frac{\beta\lambda_i}{1 + \beta^2} \right) + \frac{\lambda_i}{1 + \beta^2} E \Big] e^{\mathbf{I}\psi} \mathbf{1} + \\
& + \mathbf{I} \left[ D'' + \frac{1}{\rho} D' + D \left( \frac{1 - 2a^2 - \lambda_r - \beta(\omega - 2\alpha a^2) + (1 + \alpha\beta)a^2}{1 + \beta^2} - (\psi')^2 - \frac{2}{\rho^2} \right) + \right. \\
& + 2C'\psi' + C \left( \frac{\beta(1 - 2a^2 - \lambda_r) + \omega - 2\alpha a^2 + (\alpha - \beta)a^2}{1 + \beta^2} + \psi'' + \frac{\psi'}{\rho} \right) + \\
& + E \left( \frac{2}{\rho^2} + \frac{\beta\lambda_i}{1 + \beta^2} \right) + \frac{\lambda_i}{1 + \beta^2} F \Big] e^{\mathbf{I}\psi} \mathbf{1} + \\
& + i \left[ E'' + \frac{1}{\rho} E' + E \left( \frac{1 - 2a^2 - \lambda_r - \beta(\omega - 2\alpha a^2) - (1 + \alpha\beta)a^2}{1 + \beta^2} - (\psi')^2 - \frac{2}{\rho^2} \right) - \right. \\
& - 2F'\psi' - F \left( \frac{\beta(1 - 2a^2 - \lambda_r) + \omega - 2\alpha a^2 - (\alpha - \beta)a^2}{1 + \beta^2} + \psi'' + \frac{\psi'}{\rho} \right) + \\
& + D \left( \frac{2}{\rho^2} + \frac{\beta\lambda_i}{1 + \beta^2} \right) - \frac{\lambda_i}{1 + \beta^2} C \Big] e^{\mathbf{I}\psi} \mathbf{1} + \\
& + i\mathbf{I} \left[ F'' + \frac{1}{\rho} F' + F \left( \frac{1 - 2a^2 - \lambda_r - \beta(\omega - 2\alpha a^2) + (1 + \alpha\beta)a^2}{1 + \beta^2} - (\psi')^2 - \frac{2}{\rho^2} \right) + \right. \\
& + 2E'\psi' + E \left( \frac{\beta(1 - 2a^2 - \lambda_r) + \omega - 2\alpha a^2 + (\alpha - \beta)a^2}{1 + \beta^2} + \psi'' + \frac{\psi'}{\rho} \right) - \\
& - C \left( \frac{2}{\rho^2} + \frac{\beta\lambda_i}{1 + \beta^2} \right) - \frac{\lambda_i}{1 + \beta^2} D \Big] e^{\mathbf{I}\psi} \mathbf{1} = \mathbf{0} \tag{A.30}
\end{aligned}$$

“Сократим общий множитель”  $e^{\mathbf{I}\psi} \mathbf{1}$ , учитем, что

$$\psi'' + \frac{\psi'}{\rho} = \frac{\omega + \beta - (\alpha + \beta)a^2}{1 + \beta^2} - \frac{2a'\psi'}{a},$$

и распишем бикомплексное уравнение (A.30) по компонентам. Получим систему четырех вещественных скалярных уравнений, которая с учетом обозначений:

$$P = \frac{1 - 2a^2 - \lambda_r - \beta(\omega - 2\alpha a^2)}{1 + \beta^2} - (\psi')^2 - \frac{2}{\rho^2},$$

$$Q = \frac{\beta(2 - 3a^2 - \lambda_r) + 2\omega - 3\alpha a^2}{1 + \beta^2} - \frac{2a'\psi'}{a}$$

и равенства (A.23), следующего из нелинейной задачи, принимает вид:

$$\begin{aligned} C'' + \frac{1}{\rho}C' + C \left( P - a^2 \frac{1 + \alpha\beta}{1 + \beta^2} \right) - 2D'\psi' - D \left( Q - a^2 \frac{\alpha - \beta}{1 + \beta^2} \right) & - \\ - F \left( \frac{2}{\rho^2} + \frac{\beta\lambda_i}{1 + \beta^2} \right) + \frac{\lambda_i}{1 + \beta^2}E & = 0 \\ D'' + \frac{1}{\rho}D' + D \left( P + a^2 \frac{1 + \alpha\beta}{1 + \beta^2} \right) + 2C'\psi' + C \left( Q + a^2 \frac{\alpha - \beta}{1 + \beta^2} \right) & + \\ + E \left( \frac{2}{\rho^2} + \frac{\beta\lambda_i}{1 + \beta^2} \right) + \frac{\lambda_i}{1 + \beta^2}F & = 0 \\ E'' + \frac{1}{\rho}E' + E \left( P - a^2 \frac{1 + \alpha\beta}{1 + \beta^2} \right) - 2F'\psi' - F \left( Q - a^2 \frac{\alpha - \beta}{1 + \beta^2} \right) & + \\ + D \left( \frac{2}{\rho^2} + \frac{\beta\lambda_i}{1 + \beta^2} \right) - \frac{\lambda_i}{1 + \beta^2}C & = 0 \\ F'' + \frac{1}{\rho}F' + F \left( P + a^2 \frac{1 + \alpha\beta}{1 + \beta^2} \right) + 2E'\psi' + E \left( Q + a^2 \frac{\alpha - \beta}{1 + \beta^2} \right) & - \\ - C \left( \frac{2}{\rho^2} + \frac{\beta\lambda_i}{1 + \beta^2} \right) - \frac{\lambda_i}{1 + \beta^2}D & = 0 \end{aligned} \tag{A.31}$$

**Поведение решений при  $\rho \rightarrow 0$ .** Главные члены системы (A.31) при  $\rho \rightarrow 0$  имеют вид:

$$\begin{aligned} C'' + \frac{1}{\rho}C' - \frac{2}{\rho^2}(C + F) & = 0, \\ D'' + \frac{1}{\rho}D' - \frac{2}{\rho^2}(D - E) & = 0, \\ E'' + \frac{1}{\rho}E' - \frac{2}{\rho^2}(E - D) & = 0, \\ F'' + \frac{1}{\rho}F' - \frac{2}{\rho^2}(F + C) & = 0, \end{aligned} \tag{A.32}$$

т.е. в этом приближении система распадается на две независимые подсистемы.

Уравнения (A.32) можно перегруппировать следующим образом:

$$\begin{aligned}(C + F)'' + \frac{1}{\rho}(C + F)' - \frac{4}{\rho^2}(C + F) &= 0, \\(C - F)'' + \frac{1}{\rho}(C - F)' &= 0, \\(D - E)'' + \frac{1}{\rho}(D - E)' - \frac{4}{\rho^2}(D - E) &= 0, \\(D + E)'' + \frac{1}{\rho}(D + E)' &= 0,\end{aligned}$$

откуда видно, что при  $\rho \rightarrow 0$  поведение  $C + F$  и  $D - E$  подобно поведению решений уравнения Бесселя индекса 2, т.е.

$$C + F \sim \rho^{\pm 2}, \quad D - E \sim \rho^{\pm 2},$$

а  $C - F$  и  $D + E$  — индекса 0, т.е.

$$C - F \sim 1, \text{ или } C - F \sim \ln \rho,$$

и

$$D + E \sim 1, \text{ или } D + E \sim \ln \rho.$$

Всего, таким образом, мы имеем четыре линейно независимых решения, ограниченных в этом пределе, и четыре — неограниченных:

$$\begin{aligned}C_1 &= F_1 \approx \rho^2, \quad D_1, E_1 = o(C_1, F_1), \\C_2 &= -F_2 \approx 1, \quad D_2, E_2 = o(C_2, F_2), \\C_3 &= -F_3 \approx \ln \rho, \quad D_3, E_3 = o(C_3, F_3), \\C_4 &= F_4 \approx \rho^{-2}, \quad D_4, E_4 = o(C_4, F_4), \\D_5 &= -E_5 \approx \rho^2, \quad C_5, F_5 = o(D_5, E_5), \\D_6 &= E_6 \approx 1, \quad C_6, F_6 = o(D_6, E_6), \\D_7 &= E_7 \approx \ln \rho, \quad C_7, F_7 = o(D_7, E_7), \\D_8 &= -E_8 \approx \rho^{-2}, \quad C_8, F_8 = o(D_8, E_8),\end{aligned}$$

и в численной процедуре на левом конце необходимо будет наложить четыре условия, которые обеспечили бы обращение в ноль коэффициентов при линейно независимых решениях 3, 4, 7 и 8.

Ограниченные же решения имеют асимптотики

$$\begin{aligned} C &\approx a + b\rho^2, \\ D &\approx c + d\rho^2, \\ E &\approx c - d\rho^2, \\ F &\approx -a + b\rho^2, \end{aligned} \tag{A.33}$$

где  $a, b, c$  и  $d$  — некоторые константы, коэффициенты при линейно независимых решениях 2, 1, 6 и 5 соответственно.

**Поведение решений при  $\rho \rightarrow \infty$ .** Система (A.31) в пределе  $\rho \rightarrow \infty$  опять распадается на две независимые подсистемы, поведение каждой из которых оказывается вполне подобно поведению системы (A.24) в этом же пределе, так что мы получим

$$C, D, E, F \sim e^{\Lambda\rho}, \tag{A.34}$$

где показатели экспонент  $\Lambda$  либо равны 0, либо удовлетворяют тому же характеристическому уравнению (A.28) с теми же  $p$  и  $q$ .

Таким образом, и в этом пределе мы имеем четыре приемлемых (экспоненциально убывающих) линейно независимых решения и четыре неприемлемых (неубывающих).

Произведем подсчет неизвестных и условий. Система (A.31) — восьмого порядка, и имеет, следовательно, общее решение зависящее от восьми произвольных констант. Кроме того, эта система, и следовательно, ее общее решение, зависят от двух неизвестных вещественных параметров  $\lambda_r$  и  $\lambda_i$ . Всего, таким образом, мы имеем 10 неизвестных, подлежащих определению.

Теперь об условиях. Система (A.31) происходит из комплексной линейной системы (A.21) при  $n = 1$ , которая инвариантна относительно умножения на произвольную комплексную константу. Для однозначного выбора решения, следовательно, необходимо наложить два вещественных условия. Кроме того, мы

имеем четыре условия при  $\rho \rightarrow 0$ , обеспечивающие ограниченность решения, и четыре при  $\rho \rightarrow \infty$ , обеспечивающие убывание, то есть всего 10 условий.

Таким образом, задача о пространственной моде оказывается корректно поставленной при тех же условиях, что и задача о временной моде.

# Приложение В

## Численный метод нахождения функций отклика.

### B.1 Метод решения.

Как нелинейная краевая задача о спиральной волне, так и линейные краевые задачи о ФО решались при помощи программы DNOKS Морозова и Красицкого, описание которой можно найти в [86]. Эта программа решает одномерные краевые задачи для систем обыкновенных уравнений методом продолжения по параметру (может применяться также для решения одномерных уравнений в частных производных, при этом в качестве параметра по которому производится движение выступает время). На каждом шаге продолжения по параметру задача решается итерациями по Ньютону, при этом линейные задачи на каждой итерации решаются матричным вариантом Гауссова метода исключения с выбором главного элемента.

При использовании этой программы для целей данной работы, необходимо было принимать во внимание два ограничения:

- Программа оперирует только с системами дифференциальных уравнений второго порядка по пространственной переменной, уравнения первого или других порядков и конечные соотношения не допускаются.

- Необходимо одинаковое количество граничных условий на левом и на правом концах.

С учетом этих ограничений, задачи (A.5,A.7,A.9,A.11), (A.24,A.25,A.26) и (A.31,A.33,A.34) были переформулированы как описано ниже.

## В.2 Формулировка нелинейной задачи для численного нахождения Хагановской спиральной волны

К нужному виду нелинейная краевая задача на собственное значение  $k$  (A.5,A.7,A.9,A.11), была приведена путем добавления новой неизвестной функции  $k(\rho)$  с уравнением

$$k'' = 0$$

и краевым условием на левом конце:

$$k'(0) = 0.$$

Система уравнений зависит только от  $\psi'$  но не от  $\psi$ , и можно было бы понизить ее порядок, рассматривая  $\psi'$  как новую неизвестную. Однако, поскольку программа DNOKS оперирует только с уравнениями второго порядка, этого не делалось. В силу этого же обстоятельства, решение задачи заведомо неоднозначно, т.к. к  $\psi$  может быть добавлена произвольная константа. Для того, чтобы избавиться от этой неоднозначности, на правом конце было добавлено краевое условие:

$$\psi(\rho_{\max}) = 0.$$

В результате задача приобрела вид, пригодный для программы DNOKS:

$0 < \rho < \rho_{\max}$ :

$$\begin{aligned} a'' + \frac{a'}{\rho} + \frac{a}{1+\beta^2} \left[ 1 + (\alpha\beta - 1)a^2 - \beta\omega - (1 + \beta^2) \left( (\psi')^2 + \frac{1}{\rho^2} \right) \right] &= 0, \\ \psi'' + \frac{\psi'}{\rho} + \frac{2a'\psi'}{a} + \frac{1}{1+\beta^2} [(\alpha + \beta)a^2 - \omega - \beta] &= 0, \\ k'' &= 0. \end{aligned}$$

$\rho = 0$ :

$$\begin{aligned} a - a'\rho &= 0, \\ \psi' - \frac{\rho(\omega + \beta)}{4(1 + \beta^2)} &= 0, \\ k' &= 0. \end{aligned}$$

$\rho = \rho_{\max}$ :

$$\begin{aligned} a - \sqrt{1 - k^2} + \frac{k(1 + \beta^2)}{2\rho(\alpha + \beta)\sqrt{1 - k^2}} &= 0, \\ \psi' - k - \frac{1 - \alpha\beta}{2\rho(\alpha + \beta)} &= 0, \quad (\text{или } \psi' - k = 0, \text{ если } |\alpha + \beta| \rightarrow 0) \\ \psi &= 0. \end{aligned}$$

Начальное приближение для решения при значениях параметров  $\alpha = 0.5$ ,  $\beta = 0$  из "хорошей" области (т.е. где существуют устойчивые спиральные волны, и характеристическое уравнение (A.28) имеет два вещественных отрицательных корня) брались в виде:

$$\begin{aligned} a(\rho, t = 0) &= \frac{\rho}{1 + \rho}, \\ \psi(\rho, t = 0) &= k_H(\rho - \rho_{\max}), \\ k(\rho, t = 0) &= k_H, \end{aligned}$$

где  $k_H(\alpha)$  — асимптотическое волновое число Хагановского решения [30]:

$$k_H = \frac{2}{\alpha} e^{-\frac{\pi}{2\alpha} - 0.098 - 0.577}$$

Для нахождения решений при других значениях параметров использовался метод движения по параметру, как для параметра  $\alpha$ , так и для параметра  $\beta$ .

### B.3 Формулировка линейной задачи для численного нахождения временной моды

К нужному виду линейная краевая задача на собственное значение  $\lambda_0$  (A.24,A.25,A.26) была приведена путем добавления новой неизвестной функции  $\lambda_0(\rho)$  с уравнением

$$\lambda_0'' = 0$$

и краевым условием на правом конце:

$$\lambda_0'(\rho_{max}) = 0.$$

Кроме этого, на левом конце было добавлено условие нормировки:

$$B(0) = 1.$$

В результате задача приобрела вид, пригодный для программы DNOKS:

$$0 < \rho < \rho_{max} :$$

$$\begin{aligned} A'' + \frac{1}{\rho} A' + A \left[ \frac{1 - 3a^2 - \lambda_0 - \beta(\omega - \alpha a^2)}{1 + \beta^2} - \frac{1}{\rho^2} - (\psi')^2 \right] - \\ - 2B'\psi' - 2B \left[ \frac{\omega + \beta(1 - \frac{\lambda_0}{2}) - (2\alpha + \beta)a^2}{1 + \beta^2} - \frac{a'\psi'}{a} \right] = 0 \\ B'' + \frac{1}{\rho} B' + B \left[ \frac{1 - a^2 - \lambda_0 - \beta(\omega - 3\alpha a^2)}{1 + \beta^2} - \frac{1}{\rho^2} - (\psi')^2 \right] + \\ + 2A'\psi' + 2A \left[ \frac{\omega + \beta(1 - \frac{\lambda_0}{2}) - (\alpha + 2\beta)a^2}{1 + \beta^2} - \frac{a'\psi'}{a} \right] = 0, \end{aligned}$$

$$\lambda_0'' = 0.$$

$$\underline{\rho = 0} :$$

$$A = 0, \quad B = 0, \quad B' = 1.$$

$$\underline{\rho = \rho_{max}} :$$

$$A' = -|\Lambda|A, \quad B' = -|\Lambda|B, \quad \lambda_0' = 0.$$

где  $\Lambda$  — главный корень характеристического уравнения, если этот корень вещественный. В случае если главный корень комплексный, то граничные условия для  $A$  и  $B$  заменялись либо на условия Дирихле:

$$A = 0, \quad B = 0,$$

либо Неймана:

$$A' = 0, \quad B' = 0,$$

причем проверялось, что результаты в обоих случаях отличаются несущественно; в противном случае увеличивался расчетный интервал.

Начальное приближение для решения брались в виде:

$$\begin{aligned} A(\rho, t = 0) &= 0, \\ B(\rho, t = 0) &= a(\rho)e^{-\mu\rho}, \\ \lambda_0(\rho, t = 0) &= 0. \end{aligned}$$

Здесь декремент затухания  $\mu$ , в идеале, должен был браться равным  $|\operatorname{Re}(\Lambda)|$ , где  $\Lambda$  — главный корень характеристического уравнения. Оказалось, однако, что численная процедура не слишком чувствительна к выбору этого показателя, и вместо этого точного значения может использоваться, например, оценка основанная на Хагановском [30] решении,  $\mu = 2(\alpha + \beta)k_H$ .

Также использовался метод движения по параметру, как для параметра  $\alpha$ , так и для параметра  $\beta$ .

## В.4 Формулировка линейной задачи для численного нахождения пространственной моды

К нужному виду линейная краевая задача (A.31, A.33, A.34) с двумя собственными значениями  $\lambda_r$  и  $\lambda_i$  была приведена путем добавления двух новых неизвестных функций:  $\lambda_r(\rho)$  с уравнением

$$\lambda_r'' = 0$$

и краевым условием на правом конце:

$$\lambda'_r(\rho_{max}) = 0,$$

и  $\lambda_i(\rho)$  с уравнением

$$\lambda''_i = 0$$

и краевым условием

$$\lambda'_i(\rho_{max}) = 0.$$

Кроме этого, на левом конце было добавлено два условия нормировки:

$$C(0) = c_1,$$

$$D(0) = c_2,$$

где  $c_1$  и  $c_2$  — некоторые произвольные константы.

В результате задача приобрела вид, пригодный для программы DNOKS:

$$\underline{0 < \rho < \rho_{max}} :$$

$$\begin{aligned} C'' + \frac{1}{\rho} C' + C \left( P - a^2 \frac{1 + \alpha\beta}{1 + \beta^2} \right) - 2D'\psi' - D \left( Q - a^2 \frac{\alpha - \beta}{1 + \beta^2} \right) &- \\ - F \left( \frac{2}{\rho^2} + \frac{\beta\lambda_i}{1 + \beta^2} \right) + \frac{\lambda_i}{1 + \beta^2} E &= 0 \\ D'' + \frac{1}{\rho} D' + D \left( P + a^2 \frac{1 + \alpha\beta}{1 + \beta^2} \right) + 2C'\psi' + C \left( Q + a^2 \frac{\alpha - \beta}{1 + \beta^2} \right) &+ \\ + E \left( \frac{2}{\rho^2} + \frac{\beta\lambda_i}{1 + \beta^2} \right) + \frac{\lambda_i}{1 + \beta^2} F &= 0 \\ E'' + \frac{1}{\rho} E' + E \left( P - a^2 \frac{1 + \alpha\beta}{1 + \beta^2} \right) - 2F'\psi' - F \left( Q - a^2 \frac{\alpha - \beta}{1 + \beta^2} \right) &+ \\ + D \left( \frac{2}{\rho^2} + \frac{\beta\lambda_i}{1 + \beta^2} \right) - \frac{\lambda_i}{1 + \beta^2} C &= 0 \\ F'' + \frac{1}{\rho} F' + F \left( P + a^2 \frac{1 + \alpha\beta}{1 + \beta^2} \right) + 2E'\psi' + E \left( Q + a^2 \frac{\alpha - \beta}{1 + \beta^2} \right) &- \\ - C \left( \frac{2}{\rho^2} + \frac{\beta\lambda_i}{1 + \beta^2} \right) - \frac{\lambda_i}{1 + \beta^2} D &= 0 \end{aligned}$$

$$\lambda''_r = 0,$$

$$\lambda''_i = 0.$$

$\rho = 0$ :

$$C' = 0, \quad D' = 0, \quad E - D = 0,$$

$$C + F = 0, \quad C = c_1, \quad D = c_2.$$

$\rho = \rho_{\max}$ :

$$C' = -|\Lambda|C, \quad D' = -|\Lambda|D, \quad E' = -|\Lambda|E,$$

$$F' = -|\Lambda|F, \quad \lambda'_r = 0, \quad \lambda'_i = 0,$$

где  $\Lambda$  — вещественный главный корень характеристического уравнения; в случае комплексного главного корня, опять-таки сравнивались решения при условиях Дирихле и Неймана для  $C, D, E$  и  $F$ , и при необходимости увеличивался расчетный интервал.

Начальное приближение для решения бралось в виде:

$$C(\rho, t = 0) = a'(\rho)e^{-\mu\rho},$$

$$D(\rho, t = 0) = \rho^{-1}a(\rho)e^{-\mu\rho},$$

$$E(\rho, t = 0) = 0,$$

$$F(\rho, t = 0) = 0,$$

$$\lambda_r(\rho, t = 0) = 0,$$

$$\lambda_i(\rho, t = 0) = 0.$$

где относительно показателя  $\mu$  справедливы все те же замечания, что и для временной моды. Здесь также использовался метод движения по параметру как для  $\alpha$ , так и для  $\beta$ .